BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

KIMOU.

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

3e Année Secondaire : Mathématiques

الجزء 3

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

سلسلة هبـاج

Kimou.

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـاذج للبكالوريا

الجزء الثالث

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ــ رياضيات ــ علوم تجريبية

التزايد المقارن

قوى عدد حقيقي موجب تماما

من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ نضع : $a^b = e^{b\ln a}$

تعريف :

a عدد حقيقي موجب تماما .

نسمي الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = a^x$ الدالة الأسية ذات الأساس a

نتيجة : من أجل $a > 0$: $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$

خواص : من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b و من أجل كل عددين حقيقيين x و y لدينا الخواص التالية :

(1) $\ln(a^x) = x \ln a$ (5) $(a^x)^y = a^{xy}$

(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (6) $(a\, b)^x = a^x\, b^x$

(3) $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$ (7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

(4) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

الدالة جذر النوني :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n = a$ يسمى العدد b

الجذر النوني للعدد a و نرمز له بـ $\sqrt[n]{a}$ أي : $(\sqrt[n]{a}\,)^n = a$

تعريف :

نسمي الدالة المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ بالدالة جذر النوني (حيث $n \in IN^*$) و $n > 1$

أمثلة : $\sqrt[n]{0} = 0$ لأن : $(0)^n = 0$ إصطلاحا

$\sqrt[n]{1} = 1$ لأن $(1)^n = 1$

$\sqrt[3]{8} = 2$ لأن $(2)^3 = 8$

خاصية : من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

فإن : $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ (لأن $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$)

نشاط ــ 1

بسط الأعداد التالية :

(1) $256^{1/4}$ (2) $(0{,}25)^{1{,}5}$ (3) $3^{-1/3} \times 9^{2/3}$

الحــل ــ 1

(1) $256^{1/4} = (16 \times 16)^{1/4} = (4^4)^{1/4} = 4^{4/4} = 4^1 = 4$

(2) $(0{,}25)^{1{,}5} = [(0{,}5)^2]^{3/2} = (0{,}5)^{\frac{3}{2}\times 2} = (0{,}5)^3 = 0{,}125$

(3) $3^{-1/3} \times 9^{2/3} = 3^{-1/3} \times (3^2)^{2/3} = 3^{-1/3} \times 3^{4/3} = 3^{\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}} = 3^{3/3} = 3$

نشاط ــ 2

عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

الحــل ــ 2

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$$

منه : $f'(x) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{x}\, e^{\frac{1}{n}\ln x} = \dfrac{1}{n\,x}\sqrt[n]{x}$

نشاط ــ 3

أدرس إتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty ; -1[$ بـ $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

الحــل ــ 3

لدينا : $f(x) = (x^2-1)^{1/3}$ منه $f'(x) = \frac{1}{3}(2x)(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1}$

أي : $f'(x) = \frac{2x}{3}(x^2-1)^{-2/3}$

منه : إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty ; -1[$ هي إشارة $\frac{2x}{3}$ فقط لأن $(x^2-1)^{-2/3} > 0$

منه : $f'(x) < 0$ لأن $x \in]-\infty ; -1[$

أي : f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; -1[$

نشاط ــ 4

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

(1) $3^x + 2 \times 3^{-x} = 3$ **(2)** $(0,31)^{2x} < 3$

الحــل ــ 4

(1) $3^x + 2\times 3^{-x} = 3 \Leftrightarrow 3^x + \frac{2}{3^x} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}+2}{3^x} = 3$

$\Leftrightarrow 3^{2x} + 2 = 3 \times 3^x$

$\Leftrightarrow 3^{2x} - 3\times 3^x + 2 = 0$

نضع $y = 3^x$ حيث $y > 0$

إذن : المعادلة تصبح :

$$\begin{cases} y = 3^x \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \text{ ....}(\alpha) \end{cases}$$

حل المعادلة (α) :

$(\alpha) \Leftrightarrow (y-1)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$ أو $y = 2$

نتيجة : $3^x = 1$ أو $3^x = 2$

أي : $e^{x\ln 3} = 1$ أو $e^{x\ln 3} = 2$

أي : $x \ln 3 = \ln 1$ أو $x\ln 3 = \ln 2$

أي : $x = 0$ أو $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

خلاصة : المعادلة تقبل حلان : $\left\{0 ; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$

(2) $(0,31)^{2x} < 3 \Leftrightarrow e^{2x\ln 0,31} < e^{\ln 3}$

$\Leftrightarrow 2x \ln 0,31 < \ln 3$

$\Leftrightarrow x > \frac{\ln 3}{2\ln 0,31}$ لأن $\ln 0,31 < 0$

منه : حلول المتراجحة هي المجال $\left]\frac{\ln 3}{2\ln 0,31} ; +\infty\right[$

نشاط ــ 5

أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = a^x$ $(a > 0$ و $a \neq 1)$

الحــل ــ 5

f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$ و $f(x) = e^{x\ln a}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} +\infty : \ln a < 0 \\ 0 : \ln a > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty : 0 < a < 1 \\ 0 : a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} 0 : \ln a < 0 \\ +\infty : \ln a > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 : 0 < a < 1 \\ +\infty : a > 1 \end{cases}$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = (\ln a)\, e^{x\ln a}$

منه : $f'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$ كمايلي :

إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ إذن : $f'(x) < 0$

إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ إذن : $f'(x) > 0$

جدول التغيرات : نميز الحالتين التاليتين :

$0 < a < 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

الدالة : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من أجل $x \in [0\,;+\infty[$ نضع $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ $(n > 1)$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/n} = +\infty$

$g(0) = (0)^{1/n} = 0$

g قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$

إذن : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$

منه : **جدول تغيرات الدالة** : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

نشاط ــ 5

حول العبارة $(x-1)\sqrt{x-1}$ إلى عبارة بأس ناطق من أجل $x > 1$

الحـل ــ 5

$$(x-1)\sqrt{x-1} = (x-1)(x-1)^{1/2} = (x-1)^{\frac{1}{2}+1} = (x-1)^{3/2}$$

التزايد المقارن للدالتين $x \longmapsto e^x$ و $x \longmapsto x$

خواص أساسية : (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

التزايد المقارن للدالتين $x \longmapsto \ln x$ و $x \longmapsto x$

خواص أساسية : (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (2) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$

التزايد المقارن لكل من الدوال $x \longmapsto e^x$ و $x \longmapsto \ln x$ و $x \longmapsto x^n$ حيث $n \in IN^*$

خواص أساسية : (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ (4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$

نشاط ــ 6

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$ (4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x+2)\ln x$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)\,e^x$ (5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{x^2+x+1}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}]$

الحـل ـ 6

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(1-0) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ حسب الخاصية $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ أي $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} 2(xe^x) - e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1-0) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x+2)\ln x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (0+2)\ln x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 2\ln x = -\infty$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}] = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}[(2x-1)e^{-x} - 3]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}\left(2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}(0-0-3)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$= -\infty$

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـ 1

أكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$a = 5^{\frac{1}{\ln 5}}$ ؛ $b = 2^{\frac{1}{\ln 8}}$ ؛ $c = 5^{\frac{1}{\ln 25}}$

الحـل ـ 1

$a = 5^{\frac{1}{\ln 5}} = e^{\frac{1}{\ln 5} \times \ln 5} = e^1 = e$

$b = 2^{\frac{1}{\ln 8}} = e^{\frac{1}{\ln 8} \times \ln 2} = e^{\frac{1}{3\ln 2} \times \ln 2} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$

$c = 5^{\frac{1}{\ln 25}} = e^{\frac{1}{\ln 25} \times \ln 5} = e^{\frac{1}{2\ln 5} \times \ln 5} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

التمرين ـ 2

أكتب الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 3 :

$a = 3^{-5/4} \times 81^{5/3}$ ؛ $b = (3^{-4})^{1/3} \times 27^{-1/3}$

<u>الحــل ــ 2</u>

$$a = 3^{\frac{-5}{4}} \times 81^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{-5}{4}} \times (3^4)^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{-5}{4}} \times 3^{\frac{20}{3}} = 3^{\frac{-5}{4}+\frac{20}{3}} = 3^{\frac{65}{12}}$$

$$b = (3^{-4})^{\frac{1}{3}} \times (27)^{\frac{-1}{3}} = 3^{\frac{-4}{3}} \times (3^3)^{\frac{-1}{3}} = (3)^{-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} = 3^{\frac{-7}{3}}$$

<u>التمرين ــ 3</u>

x عدد حقيقي . بسط العبارات التالية :

$$a = 9^x + 2 \times 3^{2x+1} \qquad b = \frac{125^x + 5^{3x+1}}{25^x}$$

<u>الحــل ــ 3</u>

$$a = 9^x + 2 \times 3^{2x+1} = 9^x + 2 \times 3 \times 3^{2x} = 9^x + 6 \times (3^2)^x = 9^x + 6 \times 9^x = 7 \times 9^x$$

$$b = \frac{125^x + 5^{3x+1}}{25^x} = \frac{125^x + 5 \times 5^{3x}}{25^x} = \frac{125^x + 5 \times (125)^x}{25^x} = \frac{6 \times 125^x}{25^x} = \frac{6 \times 5^x \times 25^x}{25^x} = 6 \times 5^x$$

<u>التمرين ــ 4</u>

حل المعادلات التالية :

(1) $12^x = 3$ (4) $5^{x-1} = 2^x$

(2) $(1/4)^x = 1/8$ (5) $3^x = 4^{3x+1}$

(3) $(1/2)^x = 3$ (6) $5^{1-3x} = 1/125$

<u>الحــل ــ 4</u>

(1)
$$12^x = 3 \Leftrightarrow e^{x \ln 12} = e^{\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow x \ln 12 = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 12}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(2)
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{1}{4}} = e^{\ln\frac{1}{8}}$$
$$\Leftrightarrow x \ln \frac{1}{4} = \ln \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow -x \ln 4 = -\ln 8$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 8}{\ln 4}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{3}{2}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(3)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{1}{2}} = e^{\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow x \ln \frac{1}{2} = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow -x \ln 2 = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-\ln 3}{\ln 2}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(4)
$$5^{x-1} = 2^x \Leftrightarrow e^{(x-1)\ln 5} = e^{x\ln 2}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\ln 5 = x \ln 2$$
$$\Leftrightarrow x \ln 5 - x \ln 2 = \ln 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(5)
$$3^x = 4^{3x+1} \Leftrightarrow e^{x\ln 3} = e^{(3x+1)\ln 4}$$
$$\Leftrightarrow x \ln 3 = (3x+1)\ln 4$$
$$\Leftrightarrow x \ln 3 - 3x \ln 4 = \ln 4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln 3 - 3 \ln 4}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(6) $5^{1-3x} = 1/125 \Leftrightarrow 5^{1-3x} = 5^{-3}$
$\Leftrightarrow 1 - 3x = -3$
$\Leftrightarrow x = 4/3$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

ملاحظة : يمكن حل هذه المعادلة كما يلي :

$$5^{1-3x} = 1/125 \Leftrightarrow e^{(1-3x)\ln 5} = e^{\ln(1/125)}$$
$$\Leftrightarrow (1-3x)\ln 5 = \ln(1/125)$$
$$\Leftrightarrow \ln 5 - 3x\ln 5 = -\ln 125$$
$$\Leftrightarrow \ln 5 - 3x\ln 5 = -\ln(5)^3$$
$$\Leftrightarrow \ln 5 - 3x\ln 5 = -3\ln 5$$
$$\Leftrightarrow 1 - 3x = -3$$
$\Leftrightarrow x = 4/3$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

التمرين – 5

حل المعادلة $2^{x^2-6x} = 128$ لاحظ أن $128 = 2^7$

الحـل – 5

$$2^{x^2-6x} = 128 \Leftrightarrow 2^{x^2-6x} = 2^7$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x = 7$$
$$\Leftrightarrow (x-7)(x+1) = 0$$
$\Leftrightarrow x \in \{7 ; -1\}$ و هي حلول المعادلة المطلوبة .

التمرين – 6

حل المعادلات التالية :

(1) $(1/7)^{x^2-3x} = 49$ (3) $4^x + 3 \times 2^x - 4 = 0$

(2) $(\sqrt{5})^{3-x^2} = 5^x$ (4) $-2 \times 9^x + 5 \times 3^x = 2$

الحـل – 6

(1) $(1/7)^{x^2-3x} = 49 \Leftrightarrow 7^{-(x^2-3x)} = 7^2$
$\Leftrightarrow -(x^2 - 3x) = 2$
$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow -(x-1)(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \{1 ; 2\}$ و هي حلول المعادلة

(2) $(\sqrt{5})^{3-x^2} = 5^x \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}(3-x^2)} = 5^x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3 - x^2) = x$
$\Leftrightarrow 3 - x^2 = 2x$
$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow -(x+3)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \{-3 ; 1\}$ و هي حلول المعادلة

(3) $4^x + 3 \times 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 3(2^x) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x \ : \ y > 0 \\ y^2 + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln y} = e^{x\ln 2} \ : \ y > 0 \\ (y+4)(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x\ln 2 \ : \ y > 0 \\ y = -4 \text{ أو } y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x\ln 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ln 1 = x\ln 2$$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ و هو الحل الوحيد للمعادلة

(4) $-2 \times 9^x + 5 \times 3^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2(3^x)^2 + 5 \times (3^x) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^x \ : y > 0 \\ -2y^2 + 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln y} = e^{x \ln 3} \ : \ y > 0 \\ -2(y - \frac{1}{2})(y - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x \ln 3 \ : \ y > 0 \\ y = 1/2 \text{ أو } y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln 1/2 = x \ln 3 \\ \text{أو} \\ \ln 2 = x \ln 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\ln 1/2}{\ln 3} \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}$$ و هي حلول المعادلة

التمرين – 7

حل المتراجحات التالية :

(1) $3^x > 5$ (5) $\dfrac{2^x}{2^x + 1} < \dfrac{1}{3}$

(2) $(\sqrt{3})^x < e$ (6) $(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^x \leq 2$

(3) $\pi^x > 2$ (7) $2^{2x^2 + 2} \geq 2^{5x}$

(4) $5^{-x} < 5^{2x}$ (8) $3^{2x} - 7(3)^x + 6 \leq 0$

الحل – 7

(1) $3^x > 5 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} > e^{\ln 5}$

$\Leftrightarrow x \ln 3 > \ln 5$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$ إذن : مجموعة الحلول هي $\left] \dfrac{\ln 5}{\ln 3} \ ; +\infty \right[$

(2) $(\sqrt{3})^x < e \Leftrightarrow e^{x \ln\sqrt{3}} < e^1$

$\Leftrightarrow x \ln\sqrt{3} < 1$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{1}{\ln\sqrt{3}}$ منه : مجموعة الحلول هي $\left] -\infty \ ; \dfrac{1}{\ln\sqrt{3}} \right[$

(3) $\pi^x > 2 \Leftrightarrow e^{x \ln \pi} > e^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow x \ln \pi > \ln 2$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 2}{\ln \pi}$ منه : مجموعة الحلول هي $\left] \dfrac{\ln 2}{\ln \pi} \ ; +\infty \right[$

(4) $5^{-x} < 5^{2x} \Leftrightarrow -x < 2x$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ منه : مجموعة الحلول هي $]0 \ ; +\infty[$

(5) $\dfrac{2^x}{2^x + 1} < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{2^x + 1} - \dfrac{1}{3} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(2)^x - 2^x - 1}{3(2^x + 1)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(2)^x - 1}{3(2^x + 1)} < 0$

$\Leftrightarrow 2(2)^x - 1 < 0$ لأن $3(2^x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} < 1$

$\Leftrightarrow e^{(x+1)\ln 2} < e^0$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln 2 < 0$

$\Leftrightarrow x+1<0$ لأن $\ln 2 > 0$

$\Leftrightarrow x < -1$ منه : مجموعة الحلول هي $]-\infty\,;\,-1[$.

(6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{-x} \le (\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow -x \le 2$

$\Leftrightarrow x \ge -2$ منه : مجموعة الحلول هي $[-2\,;\,+\infty[$

(7) $2^{2x^2+2} \ge 2^{5x} \Leftrightarrow 2x^2+2 \ge 5x$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,1/2]\cup[2\,;\,+\infty[$ و هي مجموعة حلول المتراجحة .

(8) $3^{2x}-7(3)^x+6 \le 0 \Leftrightarrow (3^x)^2-7(3^x)+6 \le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3^x \ : \ y>0 \\ y^2-7y+6 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln y}=e^{x\ln 3} \ : \ y>0 \\ (y-6)(y-1) \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (3^x-6)(3^x-1) \le 0$

لندرس إشارة كل من $3^x - 1$ و $3^x - 6$ كما يلي :

$3^x-1 \ge 0 \Leftrightarrow 3^x \ge 1$

$\Leftrightarrow 3^x \ge 3^0$

$\Leftrightarrow x \ge 0$

$3^x-6 \ge 0 \Leftrightarrow 3^x \ge 6$

$\Leftrightarrow e^{x\ln 3} \ge e^{\ln 6}$

$\Leftrightarrow x\ln 3 \ge \ln 6$

$\Leftrightarrow x \ge \frac{\ln 6}{\ln 3}$

منه :

x		0		$\frac{\ln 6}{\ln 3}$	$+\infty$
3^x-1	-	0	+		
3^x-6			-	0	+
الجداء	+	0	-	0	+

نتيجة : حلول المتراجحة $(3^x-6)(3^x-1) \le 0$ هي المجال $\left[0\,;\,\frac{\ln 6}{\ln 3}\right]$ (هي حلول المتراجحة $3^{2x}-7(3)^x+6 \le 0$)

التمرين ــ 8

1 ــ أحسب المجموع : $S_n = 1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^n$ بدلالة n

2 ــ من أجل أي قيم للعدد الطبيعي n يكون $S_n \ge 10^{10}$

الحل ــ 8

1 ــ مجموع $(n+1)$ حد من حدود متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1

$S_n = 1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots 2^n$

$= 1 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$

إذن : $S_n = 2^{n+1}-1$

2 ــ $S_n \ge 10^{10} \Leftrightarrow 2^{n+1}-1 \ge 10^{10}$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} \ge 10^{10}+1$

$\Leftrightarrow e^{(n+1)\ln 2} \ge e^{\ln(10^{10}+1)}$

$\Leftrightarrow (n+1)\ln 2 \ge \ln(10^{10}+1)$

$\Leftrightarrow n+1 \ge \frac{\ln(10^{10}+1)}{\ln 2}$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^{10}+1)}{\ln 2} - 1$$

إذن : قيم الأعداد الطبيعية المطلوبة هي كل الأعداد الطبيعية الأكبر من العدد $\frac{\ln(10^{10}+1)}{\ln 2} - 1$

التمرين — 9

عند رمي قطعتي نقد متزنتين n مرة $(n \in IN^*)$

فإن إحتمال الحادثة : عدم الحصول على الثنائية $(6 ; 6)$ هو $p_n = (35/36)^n$

من أجل أي قيم للعدد n يكون $p_n \leq 0{,}01$ ؟

الحـل — 9

$$P_n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow (35/36)^n \leq 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow e^{n\ln(35/36)} \leq e^{\ln(0{,}01)}$$
$$\Leftrightarrow n\ln(35/36) \leq \ln(0{,}01)$$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(35/36)}$ لأن $0 < 35/36 < 1$ إذن $\ln(35/36) < 0$

$$\Leftrightarrow n \geq 163{,}47$$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n \geq 164$ لأن n طبيعي .

التمرين — 10

بسط الأعداد التالية :

$$a = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} \qquad b = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3^{12}}$$

الحـل — 10

(1) $a = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} = [(4096)^{1/3}]^{1/2} = (4096)^{1/6}$

لكن : $4096 = 2^{12} = 4^6$

منه : $a = (4^6)^{1/6} = 4$

خلاصة : $a = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} = 4$

(2) $b = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3^{12}} = (3)^{1/5} \times [(3)^2]^{1/3} \times [(3)^{12}]^{1/15}$

$$= (3)^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{12}{15}}$$

أي : $b = 3^{25/15} = 3^{5/3} = \sqrt[3]{3^5}$

ملاحظة : $3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = 3 \times 3^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}$

التمرين — 11

أكتب مايلي على شكل أس ناطق .

(1) $x \geq 3$: $(x-3)^2\sqrt{x-3}$

(2) $x \geq -2$: $\sqrt[8]{(x+2)^3}$

(3) $x > -1$: $\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$

(4) $x > 2$: $\frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}}$

الحـل — 11

$$(x-3)^2\sqrt{x-3} = (x-3)^2 \times (x-3)^{1/2} = (x-3)^{5/2}$$

$$\sqrt[8]{(x+2)^3} = [(x+2)^3]^{1/8} = (x+2)^{3/8}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^{1/5}} = (x+1)^{-1/5}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}} = (2x-4)^{1/3} \times (2x-4)^{-1/7} = (2x-4)^{4/21}$$

التمرين — 12

1 — أنشر العبارتين : $(2+\sqrt{2})^3$ و $(2-\sqrt{2})^3$

2 — إستنتج تبسيط العبارة $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

الحـل — 12

— 1

$$(2+\sqrt{2})^3 = (2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2$$
$$= (2+\sqrt{2})(4+4\sqrt{2}+2)$$
$$= (2+\sqrt{2})(6+4\sqrt{2})$$
$$= 12+8\sqrt{2}+6\sqrt{2}+8$$
$$= 20+14\sqrt{2}$$

$$(2-\sqrt{2})^3 = (2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^2$$
$$= (2-\sqrt{2})(4-4\sqrt{2}+2)$$
$$= (2-\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})$$
$$= 12-8\sqrt{2}-6\sqrt{2}+8$$
$$= 20-14\sqrt{2}$$

— 2

$$a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}$$
$$= (2+\sqrt{2})^{3/3} - (2-\sqrt{2})^{3/3}$$
$$= 2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})$$

$= 2\sqrt{2}$ و هو المطلوب .

التمرين — 13

حل في IR المعادلات التالية ثم إستنتج حلول المتراجحات المقترحة :

(1) $\sqrt[3]{5-3x} = 2$ ثم $\sqrt[3]{5-3x} > 2$

(2) $\sqrt[5]{x+1} = 1/2$ ثم $\sqrt[5]{x+1} \geq 1/2$

(3) $x^{2/3} = x$ ثم $x^{2/3} < x$

الحـل — 13

(1) $\sqrt[3]{5-3x} = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{5-3x})^3 = (2)^3$

$\Rightarrow 5-3x = 8$

$\Rightarrow x = -1$ و هو حل المعادلة .

نتيجة : حل المتراجحة $\sqrt[3]{5-3x} > 2$

إذا كان $5-3x \leq 0$ فإن $\sqrt[3]{5-3x} \leq 0$ إذن : المتراجحة لا تقبل حلول

إذا كان $5-3x > 0$ فإن $\sqrt[3]{5-3x} > 2$ تكافئ $(\sqrt[3]{5-3x})^3 > (2)^3$

تكافئ $5-3x > 8$

تكافئ $-3x > 3$

تكافئ $x < -1$

خلاصة :

x	$-\infty$	-1	$5/3$	$+\infty$
$5-3x$		+	0	-

لما $x \in]5/3 ; +\infty[$ المتراجحة لا تقبل حلولا

لما $x \in]-\infty ; 5/3[$ المتراجحة تقبل حلول من أجل $x \in]-\infty ; -1[$

إذن : مجموعة الحلول هي $]-\infty ; -1[$

(2) $\sqrt[5]{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt[5]{(x+1)})^5 = (1/2)^5$

$\Rightarrow x + 1 = 1/32$

$\Rightarrow x = \frac{1}{32} - 1$

$\Rightarrow x = \frac{-31}{32}$ و هو حل المعادلة .

نتيجة : حل المتراجحة $\sqrt[5]{x+1} \ge 1/2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

لما $x \in]-\infty ; -1[$: $x + 1 < 0$ منه $\sqrt[5]{x+1} < 0$ إذن المتراجحة لا تقبل حلول

لما $x = -1$: $x + 1 = 0$ منه $\sqrt[5]{x+1} = 0$ إذن المتراجحة لا تقبل حلول

لما $x > -1$: $(x+1) > 0$ منه $\sqrt[5]{x+1} > 0$ إذن

المتراجحة تكافئ $(\sqrt[5]{x+1})^5 \ge (1/2)^5$

تكافئ $x + 1 \ge 1/32$

تكافئ $x \ge -31/32$

منه : حلول المتراجحة هي المجال $[-31/32 ; +\infty[$

(3) $x^{2/3} = x \Leftrightarrow (x^2)^{1/3} = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x^2)^{3/3} = x^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-x) = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \{0 ; 1\}$ و هي حلول المعادلة .

نتيجة : حل المتراجحة $x^{2/3} < x$

لما $x \le 0$ المتراجحة لا تقبل حلولا لأن $x^{2/3} \ge 0$ و $x \le 0$

لما $x > 0$ المتراجحة تكافئ $x^2 < x^3$

تكافئ $x^2(1-x) < 0$

تكافئ $x \in]1 ; +\infty[$

منه : حلول المتراجحة هي $]1 ; +\infty[$

التمرين — 14

حل في IR^2 الجمل التالية :

(1) $$\begin{cases} x^{1/3} + y^{3/4} = 8 \\ x^{2/3} + y^{3/2} = 40 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 2^x - 3^y = 4 \\ 3(2^x) + 3^y = 24 \end{cases}$$

الحـل — 14

(1) $$\begin{cases} x^{1/3} + y^{3/4} = 8 \\ x^{2/3} + y^{3/2} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{1/3} + (y^{3/2})^{1/2} = 8 \\ (x^{1/3})^2 + y^{3/2} = 40 \end{cases}$$

نضع : $x^{1/3} = X$ و $y^{3/2} = Y$ حيث $Y \ge 0$ لأن $y^{3/2} = \sqrt{y^3}$

إذن : نحل الجملة $$\begin{cases} X + \sqrt{Y} = 8 \ .....(1) \\ X^2 + Y = 40 .....(2) \end{cases}$$ (I) حيث $X \in R$ و $Y \in [0 . +\infty[$

من المعادلة (1) : $\sqrt{Y} = 8 - X$ منه : $Y = (8-X)^2$ أي $Y = 64 - 16X + X^2$

نعوض Y في المعادلة (2) : $X^2 + (64 - 16X + X^2) = 40$

أي : $2X^2 - 16X + 24 = 0$

أي : $X^2 - 8X + 12 = 0$ و هي معادلة من الدرجة 2 ذات المجهول X

$\Delta = 64 - 48 = 16$

$\begin{cases} X_1 = \dfrac{8-4}{2} = 2 \\ X_2 = \dfrac{8+4}{2} = 6 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \sqrt{Y_1} = 8 - 2 = 6 \\ \sqrt{Y_2} = 8 - 6 = 2 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} Y_1 = 36 \\ Y_2 = 4 \end{cases}$

نتيجة (1) : الجملة (I) تقبل حلين هما $(X ; Y) \in \{(2 ; 36) ; (6 ; 4)\}$

لكن : $X = x^{1/3}$ و $Y = y^{3/2}$

أي : $X^3 = x$ و $Y^{2/3} = y$

منه : $(x ; y) \in \{(2^3 ; 36^{2/3}) ; (6^3 ; 4^{2/3})\}$ أي : $(x ; y) \in \{(8 ; 36^{2/3}) ; (6^3 ; 4^{2/3})\}$

خلاصة : الجملة $\begin{cases} x^{1/3} + y^{3/4} = 8 \\ x^{2/3} + y^{3/2} = 40 \end{cases}$ تقبل حلين هما $(8 ; 36^{2/3})$ و $(6^3 ; 4^{2/3})$

(2)
$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 4 \\ 3(2^x) + 3^y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 3^y = 4 \\ 3(2^x) + 3^y + 2^x - 3^y = 24 + 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x - 4 \\ 4 \times 2^x = 28 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x - 4 \\ 2^x = 7 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3^y = 7 - 4 = 3^1 \\ e^{x\ln 2} = e^{\ln 7} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x \ln 2 = \ln 7 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} \\ y = 1 \end{cases}$$

نتيجة : الجملة تقبل حلا وحيدا هو : $\left\{\left(\dfrac{\ln 7}{\ln 2} ; 1\right)\right\}$

التمرين — 15

حل في IR المعادلة $x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$

الحــل — 15

$$x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^{1/5})^2 + x^{1/5} - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^{1/5} \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = x \\ (y-2)(y+3) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^5 \\ y = 2 \text{ أو } y = -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x = 2^5) \text{ أو } (x = (-3)^5)$$

$\Leftrightarrow x = 32$ أو $x = -(3)^5$ و هي حلول المعادلة .

التمرين ــ 16

عين مشتقات الدوال التالية على IR

(1) $f(x) = 3^x$ ، (2) $g(x) = (1/2)^x$ ، (3) $h(x) = (4/5)^x$

الحـل ــ 16

(1) $f(x) = 3^x = e^{x\ln 3} \Rightarrow f'(x) = e^{x\ln 3}(\ln 3)$ أي $f'(x) = 3^x \times \ln 3$

(2) $g(x) = (1/2)^x = e^{x\ln(1/2)} \Rightarrow g'(x) = \ln(1/2) \times e^{x\ln(1/2)}$ أي $g'(x) = (1/2)^x \ln(1/2)$

(3) $h(x) = (4/5)^x = e^{x\ln(4/5)} \Rightarrow h'(x) = \ln(4/5) \times e^{x\ln(4/5)}$ أي $h'(x) = (4/5)^x \ln(4/5)$

التمرين ــ 17

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \to -\infty} (0,25)^x$ (3) $\lim_{x \to -\infty} (2\pi/3)^x$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (0,25)^x$ (4) $\lim_{x \to +\infty} (2\pi/3)^x$

الحـل ــ 17

(1) $\lim_{x \to -\infty} (0,25)^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln(0,25)} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

لأن $\ln(0,25) < 0$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (0,25)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln(0,25)} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$

لأن $\ln(0,25) < 0$

(3) $\lim_{x \to -\infty} (2\pi/3)^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln(2\pi/3)} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$

لأن $\ln(2\pi/3) > 0$

(4) $\lim_{x \to +\infty} (2\pi/3)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln(2\pi/3)} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

التمرين ــ 18

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على *IR بـ $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

الحـل ــ 18

من أجل كل x من *IR لدينا : $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln 3}$

منه : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim_{y \to 0} e^y = 1$

لأن $\lim_{x \to -\infty} 1/x = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$

لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x}\ln 3 = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}\ln 3 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim_{y \to 0} e^y = 1$

لأن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$

f قابلة للاشتقاق على *IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-\ln 3}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}\ln 3}$$

إذن : $f'(x) < 0$ من أجل كل x من IR^* لأن : $\frac{\ln 3}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln 3} > 0$

منه : f متناقصة تماما على المجموعة IR^*

إذن : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

__التمرين ــ 19__

أدرس تغيرات الدالتين f و g المعرفتين على IR كمايلي :

$$g(x) = (1,2)^x \ ; \ f(x) = (0,7)^x$$

__الحــل ــ 19__

1 ــ تغيرات الدالة f : $f(x) = (0,7)^x = e^{x\ln 0,7}$ إذن : معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 0,7} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

لأن $\ln 0,7 < 0$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} x\ln 0,7 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 0,7} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

f قابلة للاشتقاق على R و دالتها المشتقة : $f'(x) = (\ln 0,7) \times e^{x\ln 0,7}$

إذن : $f'(x) < 0$ من أجل كل x من R لأن $\ln 0,7 < 0$ و $e^{x\ln 0,7} > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

2 ــ تغيرات الدالة g : $g(x) = (1,2)^x = e^{x\ln 1,2}$ إذن : معرفة على R

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 1,2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

لأن $\ln 1,2 > 0$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} x\ln 1,2 = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 1,2} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $g'(x) = (\ln 1,2) \times e^{x\ln 1,2}$

إذن : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من IR لأن $\ln(1,2) > 0$ و $e^{x\ln 1,2} > 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

__التمرين ــ 20__

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + x}$

1 ــ بين أن f هي مركب دالتين : كثير حدود و دالة أسية ذات الأساس α

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f

الحـل ـــ 20

1 ـــ لتكن $u : x \longmapsto x^2 + x$ و $v : x \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

إذن : $vou(x) = v(u(x)) = v(x^2 + x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + x} = f(x)$

منه : f هي مركب الدالتين u و v أي f = vou حيث u هي كثير حدود من الدرجة الثانية و v هي دالة أسية ذات الأساس $\alpha = 1/2$

2 ـــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR و من أجل كل x من IR فإن :

$$f(x) = e^{(x^2+x)\ln\frac{1}{2}} = e^{(-x^2-x)\ln 2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{(-x^2-x)\ln 2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

لأن $\ln 2 > 0$ و $\lim_{x \to -\infty} (-x^2 - x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{(-x^2-x)\ln 2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

لأن $\ln 2 > 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (-x^2 - x) = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = [(-2x - 1)\ln 2]\, e^{(-x^2-x)\ln 2}$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-2x - 1)$ لأن $\ln 2 > 0$ و $e^{(-x^2-x)\ln 2} > 0$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$-2x-1$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[4]{2}$	↘	0

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{4}} = (2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

التمرين ـــ 21

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـــ $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{2^x}$

الحـل ـــ 21

$$f(x) = \frac{3^{2x}}{2^x} = \left(\frac{3^2}{2}\right)^x = \left(\frac{9}{2}\right)^x = (4{,}5)^x = e^{x\ln 4{,}5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 4{,}5} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 4{,}5} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = (\ln 4{,}5)\, e^{x\ln 4{,}5}$

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

إذن : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

التمرين — 22

لتكن (E) المعادلة .... $2^x + 3^x = 5^x$

1 — بين أن (E) تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$

2 — أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$

3 — ماذا تستنتج بالنسبة لعدد حلول المعادلة (E) ؟

الحـل — 22

1 — $2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$

أي المعادلة (E) تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ و هو المطلوب

2 — $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ إذن : $f(x) = e^{x\ln 2/5} + e^{x\ln 3/5}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln 2/5} + e^{x\ln 3/5} = +\infty$

لأن $\ln 3/5 < 0$ و $\ln 2/5 < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln 2/5} + e^{x\ln 3/5} = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln 3/5 = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln 2/5 = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = (\ln 2/5)\, e^{x\ln 2/5} + (\ln 3/5)\, e^{x\ln 3/5}$

منه : $f'(x) < 0$ من أجل كل x من IR لأن $\left.\begin{array}{l}(\ln 2/5)\, e^{x\ln 2/5} < 0 \\ (\ln 3/5)\, e^{x\ln 3/5} < 0\end{array}\right\}$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	↘ 1 ↘	0

3 — من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f مستمرة على IR و متناقصة تماما إذن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا .
و عليه فالمعادلة (E) تقبل حلا وحيدا .

بما أن $f(1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا هو $\{1\}$

التمرين — 23

1 — بين أن $\frac{e^x}{x^n} = e^{x - n\ln x}$ حيث $x > 0$ و $n \in IN^*$

2 — أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} x - n \ln x$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$

3 — نضع $u = x^n$ بين أن : $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln u}{u}$

4 — إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$

5 — نضع $u = 1/x$ بين أن $x^n \ln x = \frac{-\ln u}{u^n}$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x$

6 — نضع $u = -x$ بين أن $x^n e^x = \frac{(-1)^n u^n}{e^u}$

7 ـ إستنتج $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x$

8 ـ أحسب $\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - e^x$

9 ـ أحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{x^2}$

الحل ـ 23

1 ـ من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن : $x^n = e^{n\ln x}$

منه : $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n\ln x}} = e^{x-n\ln x}$

2 ـ $\lim_{x \to +\infty} x - n\ln x = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

منه : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} e^{x-n\ln x} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

3 ـ $u = x^n$ منه $\ln u = \ln(x^n)$ أي $\ln u = n\ln x$ أي $\ln x = \frac{\ln u}{n}$

منه : $\frac{1}{u} \times \frac{\ln u}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln u}{u} = \frac{\ln x}{x^n}$ و هو المطلوب.

4 ـ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\ln u}{u} = 0$

لأن $\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

5 ـ $u = 1/x$ منه : $\left.\begin{array}{l}\ln u = \ln(1/x)\\ x = 1/u\end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l}\ln u = -\ln x\\ x^n = (1/u)^n\end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l}-\ln u = \ln x\\ x^n = 1/u^n\end{array}\right\}$

منه : $x^n \ln x = \frac{-\ln u}{u^n}$ و هو المطلوب

لاحظ أن لما x يؤول إلى 0 فإن 1/x يؤول إلى $+\infty$ أي u يؤول إلى $+\infty$ $(x \overset{>}{\to} 0)$

منه : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = \lim_{u \to +\infty} \frac{-\ln u}{u^n} = 0$ لأن $\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u^n} = 0$

6 ـ $u = -x$ منه : $\left.\begin{array}{l}-u = x\\ e^u = e^{-x}\end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l}(-u)^n = x^n\\ \frac{1}{e^u} = e^x\end{array}\right\}$

منه : $x^n e^x = \frac{(-u)^n}{e^u} = (-1)^n\left(\frac{u^n}{e^u}\right)$ و هو المطلوب

7 ـ لاحظ أن لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن $-x$ يؤول إلى $+\infty$ أي u يؤول إلى $+\infty$

منه : $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{u \to +\infty} (-1)^n\left(\frac{u^n}{e^u}\right)$

$= \lim_{u \to +\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^u}{u^n}}$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^n} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \to +\infty} (-1)^n \times \frac{1}{y} = 0$$

8 – $$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - e^x = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = -\infty$$

9 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

التمرين – 24

أحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x+1}}{x}$ ثم $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

الحل – 24

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \times e^{2x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \times e^{2x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} \times e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right) \times e^x = +\infty$$

التمرين – 25

أحسب نهايات الدوال التالية عند $+\infty$:

(1) $x \longmapsto x^2 + x - \ln x$

(2) $x \longmapsto \frac{\ln x - 2x}{4x^2}$

(3) $x \longmapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$

(4) $x \longmapsto \frac{\ln(x^2+x)}{x}$

(5) $x \longmapsto e^x - x^3$

(6) $x \longmapsto x^3 - \ln x$

الحل – 25

(1) $$\lim_{x \to +\infty} x^2 + x - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

(2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - 2x}{4x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}\left[\frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x}\right] = 0$$

(3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{(x+1)\,x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) \times \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 0$$

(4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x(x+1))}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 0$$

(5) $$\lim_{x \to +\infty} e^x - x^3 = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

(6) $$\lim_{x \to +\infty} x^3 - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{\ln x}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0 \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

<u>التمرين – 26</u>

أحسب النهايات التالية : $(n \in IN^*)$

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ (6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{[\ln x]^3}$ (7) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+2x)\, e^{3x}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ (8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{1-x} - x^2 + 1)$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2+2}$ (9) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2 - 1)\, e^{3x-1}$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e \ln x}{x^2 + x}$ (10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\ln x}$

<u>الحل – 26</u>

(1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \times \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{لأن} \quad = +\infty$$

(2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^3} \times \frac{x^3}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \frac{x^3}{[\ln x]^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \left[\frac{x}{\ln x}\right]^3$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} &= +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{لأن} \quad = +\infty$$

(3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x^n}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{لأن}$$

(4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2\left(3 + \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{3}$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

$$= +\infty$$

(5) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e \ln x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \times e$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$= 0$$

(6) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}} = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{2x} \times e^{2x} \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x\, e^{2x}) \times \frac{\ln(1-x)}{2x}$$

$$= 0$$ لأن $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} 2x\, e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2x} = 0 \end{array}\right\}$$

لاحظ أن : $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2x} \times \frac{1-x}{1-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{2x}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \frac{-1}{2}$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$$ و $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

$$= 0$$

(7) $$\lim_{x \to -\infty} (1+2x)\, e^{3x} = \lim_{x \to -\infty} e^{3x} + 2x\, e^{3x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 0 + \frac{2}{3}(3x\, e^{3x})$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{2}{3}\, y\, e^y$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

$$= 0$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} y\, e^y = 0$$

(8) $$\lim_{x \to -\infty} e^{1-x} - x^2 + 1 = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(\frac{e^{1-x}}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^2\left(\frac{e \times e^{-x}}{x^2} - 1 + 0\right)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} y^2\left(e \cdot \frac{e^y}{y^2} - 1\right)$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} -x = \lim_{y \to +\infty} y$$

$$= +\infty$$

(9) $$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 1)\, e^{3x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e}\left[e^{3x}(2x^2 - 1)\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e}(2x^2 e^{3x} - e^{3x})$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e}(2x^2 e^{3x})$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e} \times \frac{x^2}{e^{-3x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e} \times \frac{x^2}{e^{-3x}} \times \frac{9}{9}$$

نضع $y = -3x$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} -3x = \lim_{y \to +\infty} y$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{9e} \times \frac{(-3x)^2}{e^{-3x}}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{9e} \times \frac{y^2}{e^y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{9e} \times \frac{1}{\frac{e^y}{y^2}}$$

$= 0$ لأن $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$

(10) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} + \frac{2x}{\ln x}$$

$= +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty$

<u>التمرين – 27</u>

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

(3) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x[\ln x]^3$

(4) $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} x \ln(x^2 - x)$

(5) $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

(6) $\lim_{x \to +\infty} (x+2) - 2\ln(2x+1)$

(7) $\lim_{x \to +\infty} -x + 1 + e^{2x} - e^x$

(8) $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x)e^x$

(9) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} - x - 4\ln(x+1)^2$

(10) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$

<u>الحـل – 27</u>

(1) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)(e^x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x - 2}$$

$$= \frac{1}{e^0 - 2}$$

$$= -1$$

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} e^x\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \dots (1)$$

نضع $g(x) = e^x$ إذن : $g'(x) = e^x$

منه : $g'(0) = e^0 = 1$

لكن تعريفا :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

أي : $1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

منه العلاقة (1) تصبح :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to 0} e^x.1 = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

(3) نضع $y = \frac{1}{x}$ إذن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} y$

منه :
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x[\ln x]^3 = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\left[\ln\frac{1}{y}\right]^3 = \lim_{y\to+\infty} \frac{[-\ln y]^3}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-[\ln y]^3}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-[\ln(y^{1/3})^3]^3}{(y^{1/3})^3}$$
$$= \lim_{y\to+\infty} -\left(\frac{3\ln(y^{1/3})}{y^{1/3}}\right)^3 = \lim_{y\to+\infty} -27\left(\frac{\ln(y^{1/3})}{y^{1/3}}\right)^3$$

بوضع $t = y^{1/3}$ إذن $t\to+\infty$ $= \lim_{t\to+\infty} -27\left(\frac{\ln t}{t}\right)^3$

$= 0$ لأن $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

(4)
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\ln(x^2-x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\ln[x(x-1)] = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x[\ln|x| + \ln|x-1|]$$

$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\ln|x|$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \ln|x-1| = \ln 1 = 0$

$= 0$

(5)
$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1}[2x-(x+1)\ln(x+1)]$$

$\left.\begin{matrix} \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x+1 = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y \\ 2x = 2y-2 \end{matrix}\right\}$: بوضع $y = x+1$ إذن $= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y}[2y-2-y\ln y]$

$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y}(-2)$ لأن $\lim_{y \overset{>}{\to} 0} y\ln y = 0$

$= -\infty$

(6)
$$\lim_{x\to+\infty} x+2-2\ln(2x+1) = \lim_{x\to+\infty} (2x+1)\left[\frac{x+2}{2x+1} - 2\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right]$$

$\lim_{x\to+\infty} 2x+1 = \lim_{y\to+\infty} y$: أي بوضع $2x+1 = y$ $= \lim_{y\to+\infty} y\left[\frac{1}{2} - 2\frac{\ln y}{y}\right]$

$= \lim_{y\to+\infty} y\left(\frac{1}{2}\right)$ لأن $\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$

$= +\infty$

(7) $$\lim_{x \to +\infty} -x+1+e^{2x}-e^{x} = \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{-x+1}{x} + \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[-1 + \frac{e^{2x}(1-e^{-x})}{2x} \times 2\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \to +\infty} x\left[-1 + 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x = \lim_{y \to +\infty} y \text{ : إذن } 2x = y \text{ بوضع } = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2} y\left[-1 + 2\frac{e^{y}}{y}\right]$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{y} = +\infty \text{ لأن } = +\infty$$

(8) $$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x)e^{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2\left[2 - \frac{3}{x}\right] \times \frac{1}{e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^2}{e^{-x}}(2-0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} -x = \lim_{y \to +\infty} y \text{ لأن } = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{e^{y}}(2)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^{y}}{y^2}}(2)$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{y^2} = +\infty \text{ لأن } = 0$$

(9) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} - x - 4\ln(x+1)^2 = \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2\left(\frac{\frac{x^2}{2}-x}{(x+1)^2} - 4\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2\left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+2x+1)} - 4\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2\left[\frac{1}{2} - 4\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)^2}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)^2 = \lim_{y \to +\infty} y \text{ لأن } = \lim_{y \to +\infty} y\left(\frac{1}{2} - 4\frac{\ln y}{y}\right)$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 \text{ لأن } = \lim_{y \to +\infty} y\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= +\infty$$

(10) $$\lim_{x \to +\infty} (x^2+3x+4)e^{\frac{1}{2}x} = +\infty$$

$$\text{لأن} \left\{\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{2}x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} x^2+3x+4 = +\infty \end{array}\right.$$

التمرين – 28

أحسب النهايات التالية :

(1) $$\lim_{x \to +\infty} (2x+3)e^{x} - e^{2x}$$

(2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2+e^{x}}$$

الحل – 28

(1) $$\lim_{x \to +\infty} (2x+3)e^{x} - e^{2x} = \lim_{x \to +\infty} 2xe^{x} + 3e^{x} - e^{2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} xe^{x}\left[2 + \frac{3}{x} - \frac{e^{x}}{x}\right]$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x e^x \left[2 - \dfrac{e^x}{x}\right]$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{e^x}{x} = -\infty$

(2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^2+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x \cdot e^{2x}}{e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+1\right)}$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x \cdot e^{2x}}{e^x}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}$

$= +\infty$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = x^2 e^{-x}$

أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

الحــل ــ 29 f دالة معرفة على IR

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}(2-x)$$

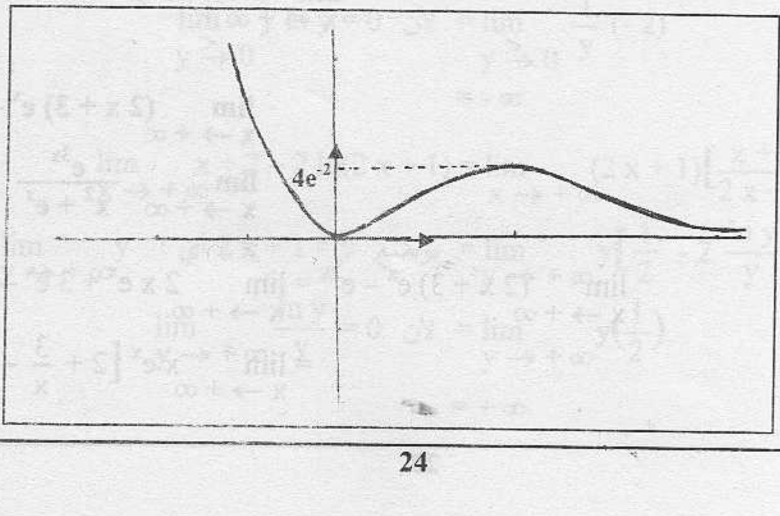
إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(2-x)$ لأن $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(2-x)$		-	0	+	0	-	

منه : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

الإنشاء :



التمرين ــ 30

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = \dfrac{3^x}{x^2}$

1 ــ أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم عند 0

2 ــ بين أن من أجل كل x من *IR : $f(x) = \dfrac{e^{x\ln 3}}{[x \ln 3]^2} \times [\ln 3]^2$

3 ــ إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

الحـل ــ 30

1 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x\ln 3}}{x^2} = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln 3} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x\ln 3}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

2 ــ من أجل كل x من *IR لدينا : $f(x) = \dfrac{3^x}{x^2}$

$$f(x) = \frac{e^{x\ln 3}}{x^2}$$

$$= \frac{e^{x\ln 3}}{x^2} \times \frac{(\ln 3)^2}{(\ln 3)^2}$$

$= \dfrac{e^{x\ln 3}}{(x \ln 3)^2} \times (\ln 3)^2$ و هو المطلوب

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x\ln 3}}{(x \ln 3)^2} \times (\ln 3)^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln 3 = \lim\limits_{y \to +\infty} y$ لأن $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^y}{y^2} \times (\ln 3)^2$

$\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^y}{y^2} = +\infty$ لأن $= +\infty$

التمرين ــ 31

عين الدوال المشتقة للدوال التالية :

(1) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}}$ (2) $g(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$

الحـل ــ 31

(1) f معرفة و قابلة للاشتقاق على *IR و تكتب من الشكل :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-2}{(x)^{1/3}} = -2\,(x)^{-1/3}$$

منه : $f'(x) = -2\left(-\dfrac{1}{3}\, x^{-\frac{1}{3}-1}\right) = \dfrac{2}{3}\, x^{-4/3} = \dfrac{2}{3\, x^{4/3}}$

ملاحظة : يمكن كتابة $\dfrac{2}{3\, x^{4/3}}$ من الشكل $\dfrac{2}{3\, x\sqrt[3]{x}}$ أي $f'(x) = \dfrac{-1}{3\, x}\, f(x)$

(2) g معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و تكتب من الشكل :

$$g(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/5}$$

منه : $g'(x) = \dfrac{1}{5}\,(2\, x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{5}-1} = \dfrac{2\, x}{5}\,(x^2 + 1)^{-4/5} = \dfrac{2\, x}{5(x^2 + 1)^{4/5}}$

التمرين ــ 32

عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على *IR بـ $f(x) = x - 6\sqrt[3]{x}$

الحـل ــ 32

$$f(x) = x - 6\sqrt[3]{x} = x - 6\, x^{1/3}$$

منه : $f'(x) = 1 - 6\left(\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1}\right) = 1 - 2\,x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{x^{2/3}}$

التمرين ـــ 33

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـــ عين معادلة مماس المنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 4

الحـل ـــ 33

1 ـــ f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-4)\sqrt[3]{x} = +\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x-4) = -\infty \end{array}\right\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-4)\sqrt[3]{x} = +\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-4) = +\infty \end{array}\right\}$

f قابلة للاشتقاق على IR* و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{3}(x)^{\frac{1}{3}-1}(x-4)$$

$$= (x)^{1/3} + \frac{1}{3x}(x-4)(x)^{1/3}$$

$$= x^{1/3}\left[1 + \frac{x-4}{3x}\right]$$

$$= x^{1/3}\left(\frac{3x + x - 4}{3x}\right)$$

$$= x^{1/3}\left(\frac{4x-4}{3x}\right)$$

إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$		-	||		+		
$4x-4$		-	||	-	0	+	
$x^{1/3}$		-	||		+		
$x^{1/3}\left(\frac{4x-4}{3x}\right)$		-	||	-	0	+	

منه جدول إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	|	-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	0	+			
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	$+\infty$

$$f(1) = (1-4)\sqrt[3]{1} = -3$$

2 ـ معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 4 تكتب من الشكل :

$y = f'(4)(x-4) + f(4)$ حيث $\begin{cases} f(4) = 0 \\ f'(4) = (4)^{1/3}\left(\dfrac{16-4}{12}\right) = 4^{1/3} = \sqrt[3]{4} \end{cases}$

منه : المعادلة هي : $y = \sqrt[3]{4}(x-4)$ أي : $y = \sqrt[3]{4}\,x - 4\sqrt[3]{4}$

التمرين ـ 34

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sqrt[3]{2x^2+1}$

1 ـ أثبت أن f دالة زوجية .

2 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

3 ـ إستنتج جدول تغيرات الدالة f على IR

الحـل ـ 34

1 ـ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)^2+1}$

$$= \sqrt[3]{2x^2+1}$$

$= f(x)$ إذن : f زوجية .

2 ـ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2x^2+1} = \lim_{y \to +\infty} \sqrt[3]{y} = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2x^2+1} = \lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt[3]{y}$ $(y = 2x^2+1)$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4x)(2x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{4x}{3}(2x^2+1)^{-2/3}$$

بما أن $0 < x^2+1$ فإن $(2x^2+1)^{-2/3} > 0$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $[0 ; +\infty[$ هي إشارة $4x$ أي موجبة كمايلي :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$

3 ـ منه جدول تغيرات الدالة f على IR :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

ملاحظة : تم استنتاج التغيرات على المجال $]-\infty ; 0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن f دالة زوجية .

التمرين ـ 35

f دالة معرفة على المجال $]-\infty ; 1]$ بـ $f(x) = (1-x)^{3/2}$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty ; 1]$

2 ـ أرسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $]-\infty ; 1]$

الحـل ـ 35

1 ـ f معرفة على $]-\infty ; 1]$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1-x)^{3/2} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$

$$f(1) = (1-1)^{3/2} = (0)^{3/2} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على]∞- ; 1[و دالتها المشتقة :

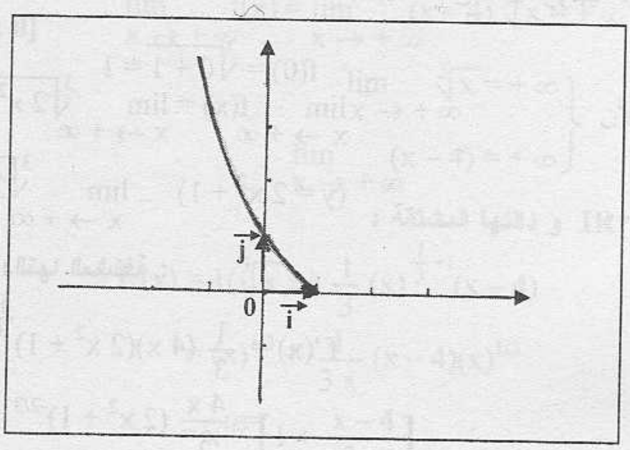
$$f'(x) = \frac{3}{2}(-1)(1-x)^{\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}(1-x)^{1/2} = -\frac{3}{2}\sqrt{1-x}$$

منه : $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty ; 1[$

منه : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

الإنشاء :



التمرين ــ 36

f دالة معرفة على **IR** بــ $f(x) = x^3 e^{-x}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ أرسم منحنى الدالة f

الحــل ــ 36

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^3}} = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3-x)$$

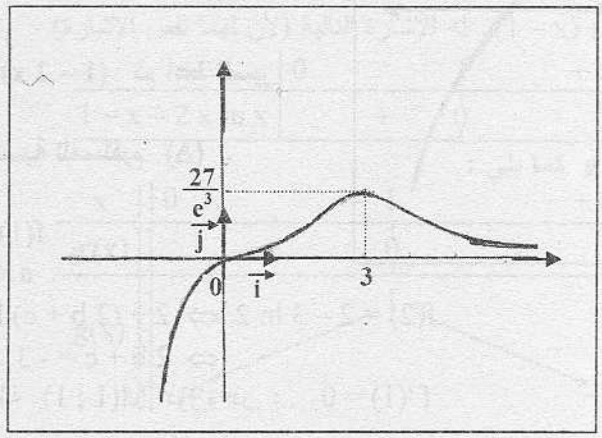
إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2(3-x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2		+	0	+			
$3 - x$			+		0	-	
$x^2(3-x)$		+	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{27}{e^3}$	↘	0

$f(3) = 27\,e^{-3} = \frac{27}{e^3}$

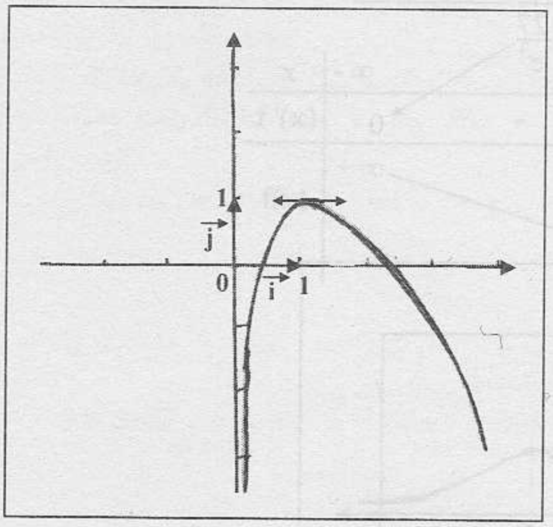


حلول تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ـ 1

f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = a x + (b x + c) \ln x$ حيث $c ; b ; a$ أعداد حقيقية .

نسمي (C) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما يلي :



1 ـ باستعمال المنحنى(C)و علما أن : $f(2) = 2 - 3 \ln 2$

بين أن $c = 1$ ؛ $a = 1$ ؛ $b = -2$

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = x + (1 - 2x) \ln x$$

2 ـ ادرس تغيرات الدالة g

ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

3 ـ حل في IR المعادلة $(1 - 2x) \ln x = 0$ ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذه الحلول .

4 ـ استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

الحـل ـ 1

1 ـ حسب المنحنى (C) فإن : $f(1) = 1$

أي $a + (b + c) \ln 1 = 1$ منه $a = 1$

إذن : $f(2) = 2 - 3 \ln 2 \Leftrightarrow 2 + (2b + c) \ln 2 = 2 - 3 \ln 2$

$\Leftrightarrow 2b + c = -3$ .... (1)

من المنحنى (C) نلاحظ ان النقطة $M(1 ; 1)$ ذورة إذن : $f'(1) = 0$

لدينا : $f'(x) = a + b \ln x + \dfrac{bx + c}{x}$ أي $f'(x) = 1 + b + \dfrac{c}{x} + b \ln x$

منه : $f'(1) = 1 + b + c$ أي : $b + c + 1 = 0$ ..... (2) لأن $f'(1) = 0$

لنحل إذن الجملة $\begin{cases} 2b + c = -3 \\ b + c = -1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2b + c - b - c = -3 + 1 \\ c = -1 - b \end{cases}$ أي $\begin{cases} b = -2 \\ c = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

نتيجة : $a = 1$ ؛ $b = -2$ ؛ $c = 1$ أي : $f(x) = x + (1 - 2x) \ln x$ و هو المطلوب .

2 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + (1 - 2x) \ln x$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + \ln x - 2(x \ln x)$$

$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{aligned} &\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0 \\ &\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + (1 - 2x) \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x + \ln x - 2x \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[1 + \frac{\ln x}{x} - 2 \ln x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(1 - 2 \ln x) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$= -\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 - 2\ln x + \frac{1-2x}{x}$$
$$= \frac{x - 2x\ln x + 1 - 2x}{x}$$
$$= \frac{1 - x - 2x\ln x}{x}$$
$$= \frac{(1-x) - 2x\ln x}{x}$$

بما أن $x \in]0 ; +\infty[$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1-x) - 2x\ln x$

لاحظ أن :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	
$-x\ln x$		$+$	0	$-$	

إذن : المجموع $(1-x) - x\ln x$ له الإشارة التالية (لأن لهما نفس الإشارة)

x	0		1		$+\infty$
$1 - x - 2x\ln x$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1$

ملاحظة : الدالة g هي نفسها الدالة f من أجل $a = c = 1$ و $b = -2$

إذن : منحنى الدالة g هو المنحنى (C) المرسوم في نص الأسئلة

3 —

$$(1-2x)\ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = 0 \quad \text{أو} \\ 1 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 \quad \text{أو} \\ x = 1/2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \{1 ; 1/2\}$ و هي الحلول المطلوبة

التفسير الهندسي :

لدينا : $f(x) - x = x + (1-2x)\ln x - x = (1-2x)\ln x$

إذن : $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (1-2x)\ln x = 0$

منه : حلول المعادلة $(1-2x)\ln x = 0$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

أي : (C) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين $A(1 ; 1)$ و $B(1/2 ; 1/2)$

4 — الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

$$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow (1-2x)\ln x > 0$$

x	0		$1/2$		1		$+\infty$
$1 - 2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$(1-2x)\ln x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نتيجة : لما $x \in]0 \,;\, 1/2[\cup]1 \,;\, +\infty[$: (C) يقع تحت (Δ)

لما $x \in \{1/2 \,;\, 1\}$: (C) يقطع (Δ)

لما $x \in]1/2 \,;\, 1[$: (C) يقع فوق (Δ)

التمرين ــ 2

نعتبر الدالة f على المجال $[0 \,;\, +\infty[$ حيث $f(x) = x\,e^{-x}$ و نسمي (γ) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O \,;\, \vec{I} \,;\, \vec{J})$

الجزء I

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 \,;\, +\infty[$

2 ــ بين أن من أجل كل m من المجال $]0 \,;\, 1/e[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين

3 ــ حل المعادلة $f(x) = m$ من أجل $m = 0$ ثم $m = 1/e$

الجزء II

ليكن α الحل الأصغر للمعادلة $f(x) = m$ من أجل $m = 1/4$

نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

لتكن (w_n) متتالية معرفة بـــ $w_n = \ln u_n$

2 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n - w_{n+1}$

نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n$

3 ــ بين أن $S_n = w_0 - w_{n+1}$

4 ــ أنشئ المنحنى (γ) في المعلم السابق .

الحــل ــ 2

1 ــ تغيرات الدالة f على المجال $[0 \,;\, +\infty[$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $[0 \,;\, +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - x$ لأن $e^{-x} > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		$1/e$		0

$$f(1) = 1\,e^{-1} = 1/e$$

2 ــ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن :

من أجل كل x من المجال $]0 \,;\, 1[$ فإن $f(x) \in]0 \,;\, 1/e[$ و f مستمرة على المجال $[0 \,;\, 1]$

إذن المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in]0 \,;\, 1/e[$ تقبل حلا على المجال $]0 \,;\, 1[$

من أجل كل x من المجال $]1 \,;\, +\infty[$ فإن $f(x) \in]0 \,;\, 1/e[$ و f مستمرة على المجال $[1 \,;\, +\infty[$

إذن المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in]0 \,;\, 1/e[$ تقبل حلا على المجال $]1 \,;\, +\infty[$

نتيجة : المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in]0 \,;\, 1/e[$ تقبل حلين أحدهما على المجال $]0 \,;\, 1[$

و الأخر على المجال $]1 ; +\infty[$

3 — $f(x) = 0 \Leftrightarrow x e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا هو 0

$f(x) = 1/e \Leftrightarrow x = 1$ (حسب جدول التغيرات)

إذن المعادلة $f(x) = 1/e$ تقبل حلا واحدا هو 1

الجزء II

1 — α حل أصغر للمعادلة $f(x) = 1/4$ إذن : $0 < \alpha < 1$

البرهان بالتراجع أن : $u_n > 0$ من أجل كل n من IN

من أجل $n = 0$: $u_0 = \alpha$ و $0 < \alpha < 1$ إذن : $u_0 > 0$ أي الخاصية محققة

من أجل $n = 1$: $u_1 = f(u_0)$ أي $u_1 = f(\alpha)$

لكن $0 < \alpha < 1$ إذن : $0 < f(\alpha) < 1/e$ منه : $f(\alpha) > 0$

أي $u_1 > 0$ منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_n > 0$ من اجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا $u_n > 0$ إذن : $0 < f(u_n) < 1/e$ أي $f(u_n) > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من IN : $u_n > 0$

2 — $w_n = \ln u_n$ أي $w_{n+1} = \ln u_{n+1}$

منه :
$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= \ln u_n - \ln u_{n+1} \\ &= \ln u_n - \ln(f(u_n)) \\ &= \ln u_n - \ln [u_n e^{-u_n}] \\ &= \ln u_n - [\ln u_n + \ln e^{-u_n}] \\ &= \ln u_n - [\ln u_n - u_n] \\ &= u_n \end{aligned}$$
و هو المطلوب .

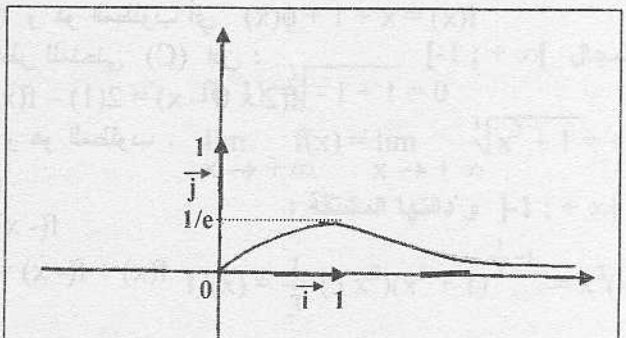
3 — لدينا المساواة $u_n = w_n - w_{n+1}$ إذن لنكتب هذه المساواة من أجل $n = 0$ ؛ $n = 1$ ؛ .... $n = n$ كمايلي :

$$u_0 = w_0 - w_1$$
$$u_1 = w_1 - w_2$$
$$u_2 = w_2 - w_3$$
$$\vdots$$
$$u_n = w_n - w_{n+1}$$

بجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على : $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = w_0 - w_{n+1}$

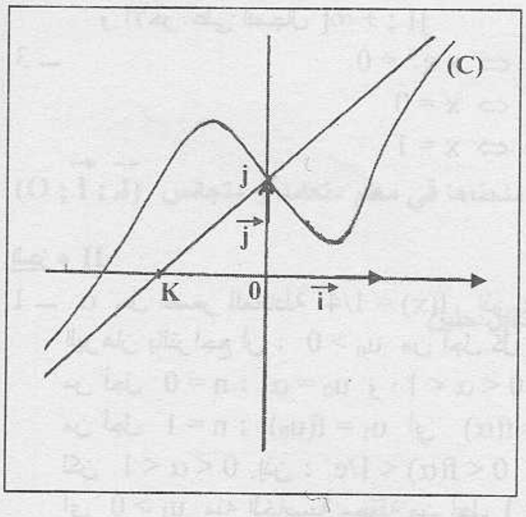
أي : $S_n = w_0 - w_{n+1}$ و هو المطلوب .

الإنشاء :



التمرين — 3

إليك التمثيل البياني (C) في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و (D) هو المستقيم المقارب للمنحنى (C) و المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 حيث :



النقطة $J(0 ; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C) .
المستقيم (D) يشمل النقطتين $K(-1 ; 0)$ و $J(0 ; 1)$ و المماس (T)
له المعادلة $y = (1 - e)x + 1$

1 ـ عين معادلة المستقيم (D) .

نفرض أن يوجد عددين حقيقيين m و p و دالة عددية ϕ معرفة على
IR حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = mx + p + \phi(x)$ مع $\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = 0$

2 ـ بين أن $m = p = 1$

3 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x) = 2$

4 ـ إستنتج أن الدالة ϕ فردية .

5 ـ أثبت أن f' (مشتقة الدالة f) دالة زوجية .

نفرض أن من اجل كل عدد حقيقي x : $\phi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$

حيث a و b عددان حقيقيان .

6 ـ بين أن $b = 0$

7 ـ أحسب $f'(x)$

8 ـ باستعمال ميل المماس (T) أثبت أن $a = -e$ ثم استنتج عبارة $f(x)$

الحل ـ 3

1 ـ
$$\begin{cases} K(-1 ; 0) \\ J(0 ; 1) \end{cases} \text{ إذن } \quad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} \text{ أي } \quad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لتكن $M(x ; y)$ نقطة كيفية من المستوي إذن : $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \,||\, \overrightarrow{KJ}$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y - 1$$

$\Leftrightarrow y = x + 1$ و هي معادلة المستقيم المقارب (D)

2 ـ
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + p)] = \lim_{x \to \infty} [mx + p + \phi(x) - (mx + p)]$$
$$= \lim_{x \to \infty} \phi(x)$$

$= 0$ حسب المعطيات .

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = mx + p$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

لكن حسب السؤال (1) فإن المستقيم المقارب (D) للمنحنى (C) معادلته $y = x + 1$

منه بالمطابقة : $m = 1 ; p = 1$ و هو المطلوب أي $f(x) = x + 1 + \phi(x)$

3 ـ لدينا النقطة $J(0 ; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C) إذن :

$$f(2 \times 0 - x) = 2(1) - f(x) \Leftrightarrow f(-x) = 2 - f(x)$$

$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 2$ و هو المطلوب .

4 ـ لدينا
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x + 1 + \phi(x) \\ f(-x) &= -x + 1 + \phi(-x) \end{aligned}\right\}$$

منه $f(x) + f(-x) = 2 + \phi(x) + \phi(-x)$

لكن $f(x) + f(-x) = 2$

إذن $\phi(x) + \phi(-x) = 0$

أي : $\phi(-x) = -\phi(x)$ أي الدالة ϕ فردية . و هو المطلوب

5 ـ لدينا : $f(x) + f(-x) = 2$ أي $f(-x) = 2 - f(x)$

نضع $g(x) = f(-x)$ منه $g(x) = 2 - f(x)$ .... (1)

إذن : g هي مركب الدالتين $u : x \longmapsto -x$ و $f : x \longmapsto f(x)$

حيث $g(x) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

إذن : $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$ مع $u'(x) = -1$

منه : $g'(x) = -f'(u(x))$ أي $g'(x) = -f'(-x)$

من جهة أخرى باشتقاق طرفي المساواة (1) نحصل على : $g'(x) = 0 - f'(x)$

أي : $-f'(-x) = -f'(x)$

أي : $f'(-x) = f'(x)$

منه : الدالة f' زوجية .

6 ــ لدينا : $\phi(x) = (a x + b) e^{-x^2}$

منه : $\phi(-x) = (-a x + b) e^{-x^2}$

أي : $\phi(-x) = -(a x - b) e^{-x^2}$

لكن ϕ دالة فردية إذن : من أجل كل x من IR : $\phi(-x) = -\phi(x)$

أي : $-(a x - b) e^{-x^2} = -(a x + b) e^{-x^2}$

أي : $-b = b$

أي : $b = 0$

نتيجة : $\phi(x) = a x e^{-x^2}$

7 ــ لدينا : $\phi(x) = a x e^{-x^2}$

إذن : $\phi'(x) = a e^{-x^2} - 2 a x^2 e^{-x^2}$

أي : $\phi'(x) = (1 - 2x^2) a e^{-x^2}$

منه : $f'(x) = 1 + (1 - 2x^2) a e^{-x^2}$ لأن حسب السؤال (2) فإن $f(x) = x + 1 + \phi(x)$

8 ــ لدينا ميل المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو $(1 - e)$ أي $f'(0) = 1 - e$

$$f'(0) = 1 - e \Leftrightarrow 1 + (1 - 0) a = 1 - e$$
$$\Leftrightarrow 1 + a = 1 - e$$
$$\Leftrightarrow a = -e$$

خلاصة : $\phi(x) = -e\, x\, e^{-x^2} = -x e^{1-x^2}$

منه : $f(x) = x + 1 - x e^{1-x^2}$ و هي عبارة $f(x)$

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بــ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ أثبت أن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ بين أن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عند النقطة $M(-1 ; 0)$ موازي لمحور التراتيب .

4 ــ عين نقطة إنعطاف المنحنى (C) .

5 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحــل ــ 4

1 ــ تغيرات الدالة f على المجال $[-1 ; +\infty[$

$$f(-1) = \sqrt[3]{-1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2)(x^3 + 1)^{\frac{1}{3} - 1} = x^2 (x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

إشارة $f'(x)$:

لدينا $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

منه إشارة $x^3 + 1$ هي إشارة $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 - x + 1$		+	
$x + 1$	-	0	+
$x^3 + 1$	-	0	+

نتيجة : من أجل كل x من $]-1 ; +\infty[$: $x^3+1>0$ منه : $\sqrt[3]{x^3+1}>0$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2 فقط كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
x^2	‖	$+$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

$$f(0)=\sqrt[3]{0+1}=1$$

ملاحظة : يمكن ملاحظة أن : $f'(x)=x^2(x^3+1)^{-2/3}$

$$=x^2\left(\frac{1}{x^3+1}\right)^{2/3}$$

$$=x^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3+1}}\right)^2$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي اشارة x^2 فقط لأن $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3+1}}\right)^2>0$

2 – $$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}(x^3+1)^{1/3}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^3)^{1/3}\times\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x-x$$ لأن $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$=0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 – $$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+1)}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{x+1}\times\sqrt[3]{x^2-x+1}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{(x+1)^{1-\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{1+1+1}}{(x+1)^{2/3}}$$

$$=\lim_{\substack{y\to 0\\ >}}\frac{\sqrt[3]{3}}{y}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} x+1 = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

إذن : المنحنى (C) يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الإحداثيات (0 ; 1 -) موازي لحامل محور التراتيب .

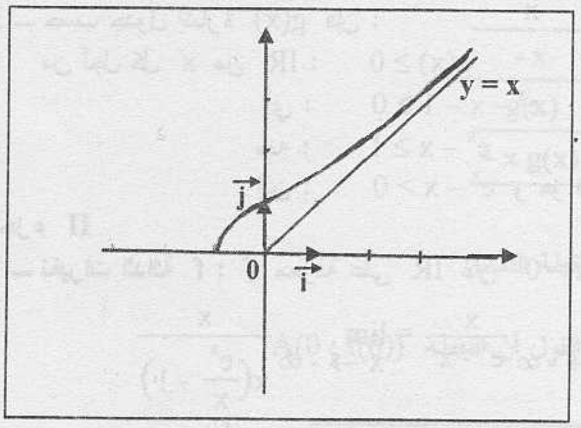
4 ــ يمكن تعيين نقطة الإنعطاف بدراسة إشارة المشتقة الثانية كما يلي :

$$f''(x) = 2x(x^3+1)^{-2/3} - \frac{2}{3}(3x^2)(x^3+1)^{-\frac{2}{3}-1}(x^2)$$
$$= 2x(x^3+1)^{-2/3} - 2x^4(x^3+1)^{-5/3}$$
$$= 2x(x^3+1)^{-5/3}[(x^3+1)^1 - x^3]$$
$$= 2x(x^3+1)^{-5/3}$$

منه إشارة $f''(x)$ على المجال $]-1 ; +\infty[$ هي إشارة $2x$ لأن $0 < (x^3+1)$ كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
2 x		−	0	+	

لدينا الدالة f'' تنعدم عند 0 و تغير إشارتها من سالبة إلى موجبة إذن النقطة $M(0 ; f(0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) أي $M(0 ; 1)$ نقطة إنعطاف .



ملاحظة : كان من الممكن إستنتاج أن النقطة $M(0 ; 1)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) من جدول تغيرات الدالة f (حالة خاصة ظاهرة) حيث الدالة f' تنعدم عند 0 و لا تغير إشارتها .

5 ــ الإنشاء :

التمرين ــ 5

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I

لتكن g الدالة المعرفة على IR بــ $g(x) = e^x - x - 1$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g

2 ــ إستنتج إشارة g(x)

3 ــ أثبت أن من أجل كل x من IR : $e^x - x > 0$

الجزء II

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 . و ليكن (T) هذا المماس

3 ــ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T)

4 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحل ــ 5

الجزء I

1 ــ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = e^x - 1$$

منه : $g'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0$

$\iff e^x \geq e^0$

$\iff x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3 ـ حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن :

من أجل كل x من IR : $g(x) \geq 0$

أي : $e^x - x - 1 \geq 0$

منه : $e^x - x \geq 1$

إذن : $e^x - x > 0$ و هو المطلوب .

الجزء II

1 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR لأن $e^x - x > 0$ (أي $e^x - x \neq 0$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x - x - (e^x - 1)\,x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x - x - x\,e^x + x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1 - x)$ لأن $e^x > 0$ و $(e^x - x)^2 > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدلة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

$$f(1) = \frac{1}{e-1}$$

2 ـ معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1/1 = 1 \end{cases}$ منه : (T) له المعادلة $y = (x - 0) + 0$ أي $y = x$

3 ـ وضعية (C) بالنسبة إلى المماس (T) :

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x\,e^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-x\,g(x)}{e^x - x}$$

إذن : إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $-x\,g(x)$ لأن $e^x - x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$-x\,g(x)$		$+$	0	$-$	

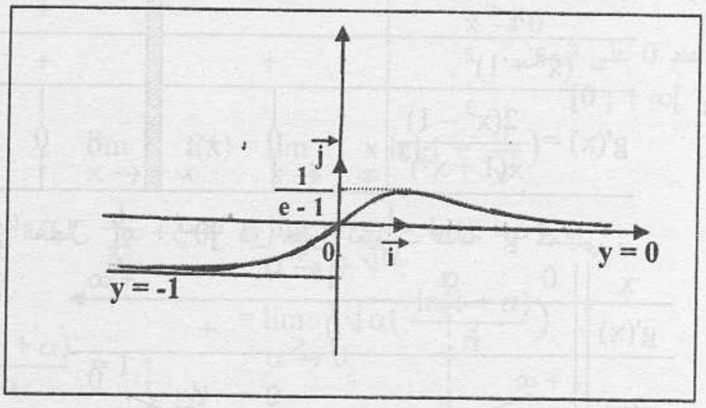
نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 0[$ المنحنى (C) فوق المماس (T)

لما $x = 0$ المنحنى (C) يقطع المماس (T) في نقطة التماس

لما $x \in]0 ; +\infty[$ المنحنى (C) تحت المماس (T)

ملاحظة : في هذه الحالة المماس (T) يخترق المنحنى (C) إذن يمكن القول أن النقطة $A(0 ; f(0))$ هي نقطة إنعطاف المنحنى (C)

4 ـ الإنشاء :



التمرين ـ 6

لتكن f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) : x > 0 \\ 0 \quad : x = 0 \end{cases}$

نرمز بـ (C) إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس

الجزء I

نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1 + x^2}$

1 ـ أحسب $g'(x)$ ثم بين أن من أجل $x > 0$ $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(1 + x^2)^2}$

2 ـ إستنتج إشارة $g'(x)$

3 ـ أرسم جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$

4 ــ أثبت أن يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$

5 ــ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

الجزء II

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

3 ــ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 على اليمين ثم عين معادلة نصف المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 ــ أنشئ المنحنى (C)

الحل ــ 6

الجزء I

1 ــ من أجل كل x من IR^* لدينا :

$$g'(x) = \frac{-\frac{2x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2}{x^3} \times \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+1) + 4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$$ و هو المطلوب

2 ــ إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	||	-	0	+
x	-		-	||	+		+
$(x^2+1)^2$	+		+	||	+		+
$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$	-	0	+	||	-	0	+

3 ــ حسب إشارة $g'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ فإن جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	0	α	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	+ 0 -	↘ $-1+\ln 2$ ↗ -	0

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

$$g(1) = \ln(1+1) - \frac{2}{2} = -1 + \ln 2$$

4 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0 ; 1[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

لدينا :

$$g(0,5) = \ln\left(1 + \frac{1}{0,25}\right) - \frac{2}{1,25} = 0,009$$

$$g(0{,}6) = \ln\left(1 + \frac{1}{0{,}36}\right) - \frac{2}{1{,}36} = -0{,}14$$

إذن : $\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0{,}5\,;\,0{,}6] \\ g(0{,}5) \times g(0{,}6) < 0 \end{array}\right\}$

منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد β من المجال $]0{,}5\,;\,0{,}6[$ يحقق $g(\beta) = 0$

بما أن العدد α وحيد فإن $\beta = \alpha$

5 ـ بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0	$0{,}5$	α	$0{,}6$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء II

1 ـ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln\left(\frac{1 + x^2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\,[\ln(1 + x^2) - \ln x^2]$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\,[\ln(1 + x^2) - 2\ln x] \quad \text{لأن } x > 0$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln(1 + x^2) - 2x\ln x$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0\ln(1 + 0) - 2x\ln x$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0 - 2x\ln x$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$$

بما أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 = f(0)$

فإن الدالة f مستمرة عند 0 على اليمين .

2 ـ تغيرات الدالة f على $[0\,;+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln(1 + \alpha) \quad \text{نضع } \alpha = \frac{1}{x^2} \text{ إذن : } x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\alpha}\left(\frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha}\right)$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \left\{\begin{array}{l} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 1 \\ \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\alpha} = 0 \end{array}\right.$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x\left(\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2} \times \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1 + x^2}$$

$$= g(x)$$

منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

إذن : جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

$$f(\alpha) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) > 0$$

3 ـ قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 على اليمين :

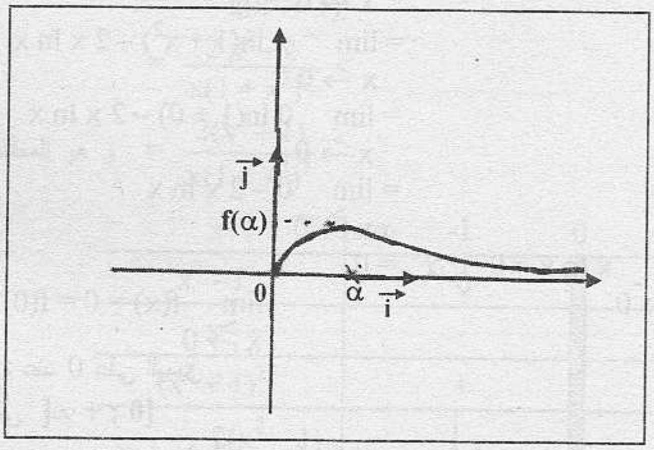
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

منه : f لا تقبل الاشتقاق على يمين 0 و عليه منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $x = 0$ (شاقولي) .

4 ـ الإنشاء :



التمرين ـ 7

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـ عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

3 ـ أحسب $f(0)$ ثم أرسم المنحنى (C)

4 ـ ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$

5 ـ بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا α حيث $-2 < \alpha < -1$

6 ـ بين أن α يحقق العلاقة $\alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\alpha/2}$

الحل ـ 7

1 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2 e^{-x} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 0$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$$
$$= (x+1)e^{-x}(2-x-1)$$
$$= (x+1)(1-x)e^{-x}$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(1-x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x + 1		-	0	+		+	
1 - x		+		+	0	-	
f '(x)		-	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	4/e	↘	0

$f(-1) = 0$

$f(1) = (1+1)^2 e^{-1} = 4/e$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

دراسة الفرع عند $-\infty$:

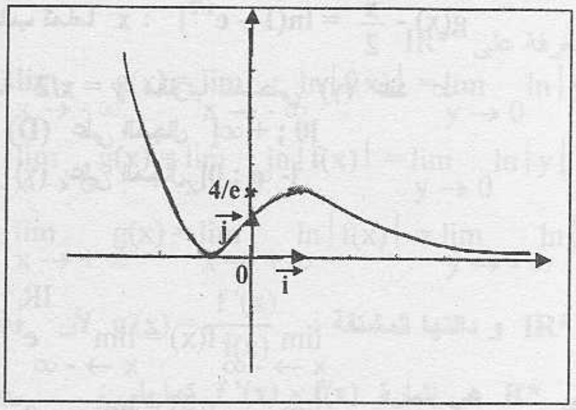
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -(x+1)^2 \times \frac{e^{-x}}{-x} = -\infty$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} -(x+1)^2 = -\infty$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرع من قطع مكافئ في إتجاه محور التراتيب عند $-\infty$

3 ــ $f(0) = (0+1)e^0 = 1$

الإنشاء :



4 ــ عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ هو عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = k$

و عليه نميز الحالات التالية :

لما $k \in]-\infty ; 0[$: المعادلة لا تقبل حلول

لما $k = 0$: المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $k \in]0 ; 4/e[$: المعادلة تقبل ثلاثة حلول مختلفة .

لما $k = 4/e$: المعادلة تقبل حلين .

لما $k \in]4/e\,;+\infty[$: المعادلة تقبل حلا واحدا .

5 ــ من أجل $k=2$ لدينا $2 \in]4/e\,;+\infty[$ إذن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا واحدا α

نعرف الدالة g على IR بـ $g(x)=f(x)-2$

لدينا : g مستمرة على IR و خاصة على $[-2\,;-1]$

و $g(-2)=(-2+1)^2 e^2-2=e^2-2>0$

و $g(-1)=0-2=-2<0$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [-2\,;-1] \\ g(-2)\times g(-1)<0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $]-2\,;-1[$ يحقق $g(\alpha)=0$

أي : $f(\alpha)-2=0$ أي $f(\alpha)=2$ و هو المطلوب

6 ــ

$$f(\alpha)=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha}=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 e^{-\alpha}}=\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(\alpha+1)^2}{e^{\alpha}}}=\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|\alpha+1|}{\sqrt{e^{\alpha}}}=\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-\alpha-1}{e^{\alpha/2}}=\sqrt{2} \quad \text{لأن} \quad \alpha+1<0 \quad (-2<\alpha<-1)$$
$$\Leftrightarrow -\alpha-1=\sqrt{2}\,.\,e^{\alpha/2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha=-1-\sqrt{2}\,e^{\alpha/2}$$ و هو المطلوب .

<u>التمرين ــ 8</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=e^{x/2}-e^x$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f ثم عين إشارة $f(x)$

2 ــ أرسم المنحنى (C)

لتكن g الدالة المعرفة على IR^* بـ $g(x)=\ln|e^{x/2}-e^x|$

نسمي (γ) منحنى الدالة g في المعلم $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة g

4 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x)-x=\ln(1-e^{-x/2})$

5 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (γ) عند $+\infty$

6 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x : $g(x)-\dfrac{x}{2}=\ln(1-e^{x/2})$

7 ــ بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x/2$ مقارب للمنحنى (γ) عند $-\infty$

8 ــ أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) على المجال $]0\,;+\infty[$

9 ــ أدرس وضعية (T) بالنسبة إلى (γ) على المجال $]-\infty\,;0[$

10 ــ أنشئ المنحنى (γ)

<u>الحل ــ 8</u>

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{x/2}-e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x/2}(1-e^{x/2})=-\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}-e^x=e^{x/2}\left(\frac{1}{2}-e^{x/2}\right)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\dfrac{1}{2}-e^{x/2}$ كما يلي :

$$\frac{1}{2} - e^{x/2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq e^{x/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} \geq x/2$$

$$\Leftrightarrow -\ln 2 \geq x/2$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \ln\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		$+\infty$
$\frac{1}{2} - e^{x/2}$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

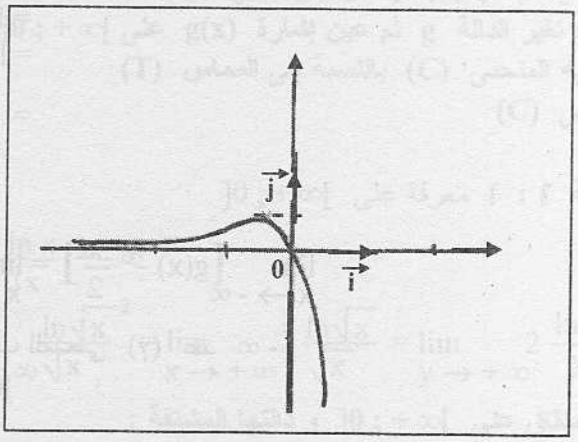
x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$f\left(\ln\frac{1}{4}\right) = \sqrt{e^{\ln\frac{1}{4}} - e^{\ln\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2 ـ الإنشاء :



3 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR^*

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln|f(x)| = \lim_{y \to 0} \ln|y| = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \ln|f(x)| = \lim_{y \to 0} \ln|y| = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln|f(x)| = \lim_{y \to -\infty} \ln|y| = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ لأن $g(x) = \ln|f(x)|$

منه : إشارة $g'(x)$ على R^* هي إشارة $f'(x) \times f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$			$+$		‖	$-$	
$f'(x) \times f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g\left(\ln\frac{1}{4}\right) = \ln\left|f\left(\ln\frac{1}{4}\right)\right| = \ln\frac{1}{4}$$

4 ـ ليكن $x > 0$ إذن : $f(x) < 0$ أي $e^{x/2} - e^x < 0$ منه $|e^{x/2} - e^x| = e^x - e^{x/2}$

إذن :

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(e^x - e^{x/2}) \\ &= \ln[e^x(1 - e^{-x/2})] \\ &= \ln e^x + \ln(1 - e^{-x/2}) \\ &= x + \ln(1 - e^{-x/2}) \end{aligned}$$

منه :

$$g(x) - x = \ln(1 - e^{-x/2})$$

5 ـ لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x/2}) = \ln 1 = 0$$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (γ) عند $+\infty$

6 ـ ليكن $x < 0$ إذن : $f(x) > 0$ أي $e^{x/2} - e^x > 0$ أي $|e^{x/2} - e^x| = e^{x/2} - e^x$

منه :

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(e^{x/2} - e^x) \\ &= \ln[(e^{x/2}(1 - e^{x/2})] \\ &= \ln e^{x/2} + \ln(1 - e^{x/2}) \\ &= \frac{x}{2} + \ln(1 - e^{x/2}) \end{aligned}$$

إذن :

$$g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{x/2})$$

7 ـ لدينا :

$$\lim_{x \to -\infty} \left[g(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x \to -\infty} \ln(1 - e^{x/2}) = \ln 1 = 0$$

إذن : المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x/2$ مقارب للمنحنى (γ) عند $-\infty$

8 ـ وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) على $]0 ; +\infty[$

$x > 0$ إذن : $g(x) - x = \ln(1 - e^{-x/2})$

لندرس إشارة $\ln(1 - e^{-x/2})$ كمايلي :

$$\ln(1 - e^{-x/2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x/2} \geq 1$$

$- e^{-x/2} \geq 0 \Leftrightarrow$ مستحيل لأن $- e^{-x/2} < 0$

منه : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $\ln(1 - e^{-x/2}) < 0$

إذن : المنحنى (γ) تحت المستقيم (D)

9 ـ وضعية (γ) بالنسبة إلى (T) على المجال $]-\infty ; 0[$:

$x < 0$ إذن : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{x/2})$

لندرس إشارة $\ln(1 - e^{x/2})$ كمايلي :

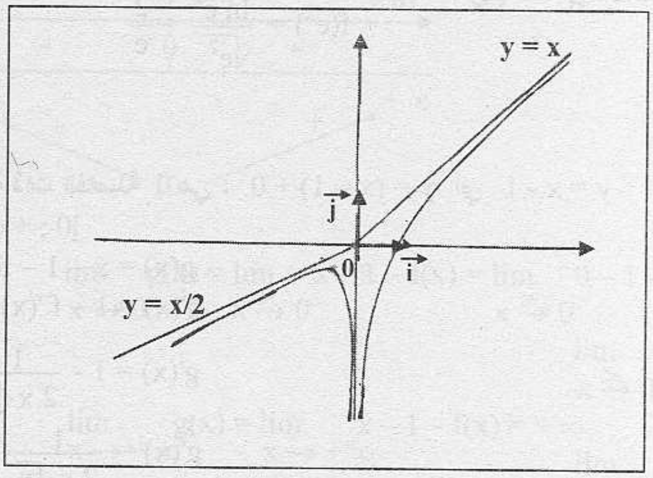
$$\ln(1 - e^{x/2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{x/2} \geq 1$$

$- e^{x/2} \geq 0 \Leftrightarrow$ مستحيل لأن $- e^{x/2} < 0$

منه : من أجل كل x من $]-\infty ; 0[$: $\ln(1 - e^{x/2}) < 0$

إذن : المنحنى (γ) تحت المستقيم (T)

10 ــ الإنشاء :



التمرين ــ 9

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

لتكن g الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ $g(x)=x-1-f(x)$

3 ــ تحقق أن من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{1}{2\,x\sqrt{x}}\left[\ln x+2(x\sqrt{x}-1)\right]$

4 ــ أحسب $g'(1)$ ثم أدرس إشارة $g'(x)$ على كل من المجالين $]0\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$

5 ــ إستنتج إتجاه تغير الدالة g ثم عين إشارة $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$

6 ــ ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T)

7 ــ أنشئ المنحنى (C)

الحـل ــ 9

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}^{\,2}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}2\,\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{y\to+\infty}2\,\frac{\ln y}{y}=0$$

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}=\frac{1}{2\,x\sqrt{x}}(2-\ln x)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على $]0\,;+\infty[$ هي إشارة $2-\ln x$ لأن $2\,x\sqrt{x}>0$

منه : $2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq \ln x$

$\Leftrightarrow e^2\geq x$

x	0		e^2		$+\infty$
$2-\ln x$	‖	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$$f(e^2)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}$$

2 ـ
$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f'(1)=\frac{1}{2}(2-0)=1 \end{array}\right\}$$

منه : معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $y=(x-1)+0$ أي $y=x-1$

3 ـ ليكن x عنصر من المجال $]0\,;+\infty[$

لدينا : $g(x)=x-1-f(x)$

إذن: $g'(x)=1-f'(x)$

أي : $g'(x)=1-\frac{1}{2x\sqrt{x}}(2-\ln x)$

أي : $g'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}[2x\sqrt{x}-(2-\ln x)]$

أي $g'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}(2x\sqrt{x}-2+\ln x)$

أي : $g'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}[\ln x+2(x\sqrt{x}-1)]$ و هو المطلوب .

4 ـ $g'(1)=\frac{1}{2}[0+2(1-1)]=\frac{1}{2}(0)=0$

لندرس إشارة كل من $\ln x$ ثم $x\sqrt{x}-1$ على المجالين $]0\,;1[$ ؛ $]1\,;+\infty[$

$$\begin{aligned} x\sqrt{x}-1\ge 0 &\Leftrightarrow x\sqrt{x}\ge 1 \\ &\Leftrightarrow x^{3/2}\ge 1 \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}\ln x}\ge e^0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\ln x\ge 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x\ge 0 \\ &\Leftrightarrow x\ge 1 \end{aligned}$$

منه جدول إشارة $x\sqrt{x}-1$ **كما يلي :**

x	0		1		$+\infty$
$x\sqrt{x}-1$	‖	$-$	0	$+$	

من جهة أخرى لدينا إشارة $\ln x$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

نتيجة : $(x\sqrt{x}-1)$ و $(\ln x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0\,;+\infty[$

إذن $2(x\sqrt{x}-1)$ و $\ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0\,;+\infty[$

منه : المجموع $\ln x+2(x\sqrt{x}-1)$ له نفس إشارة $\ln x$ و $(x\sqrt{x}-1)$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x+2(x\sqrt{x}-1)$	‖	$-$	0	$+$	

خلاصة : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x+2(x\sqrt{x}-1)$ لأن $\frac{1}{2x\sqrt{x}}>0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

5 ــ منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x - 1 - f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0 - 1 - f(x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 - f(x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$g(1) = 1 - 1 - f(1) = 0$$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

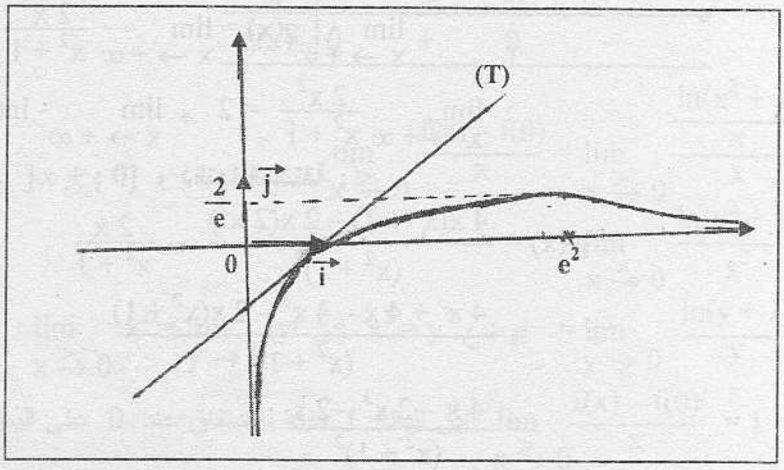
6 ــ وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) :

$$x - 1 - f(x) = g(x)$$

إذن : لما $x = 1$: $g(x) = 0$ إذن : المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$: $g(x) > 0$ إذن : المماس (T) يقع فوق المنحنى (C)

7 ــ الإنشاء :



التمرين ـــ 10

g دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1 ـــ بين أن على المجال $]1 ; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α يطلب إعطاء حصر له ذو سعة 10^{-1}

2 ـــ حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

3 ـــ ماهي نهاية النسبة $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ لما x يؤول إلى 0 بقيم كبرى ؟

4 ـــ إستنتج أن f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين ثم أوجد معادلة لنصف المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5 ـــ تحقق أن : من أجل كل $x > 0$: $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

6 ـــ إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

7 ـــ بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

8 ـــ إستنتج تغيرات الدالة f

9 ـــ أنشئ المنحنى (C) و المماس (T) .

الحـل ـــ 10

1 ـــ لإثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $]1 ; +\infty[$

نقوم بدراسة تغيرات الدالة g على المجال $]1 ; +\infty[$ كمايلي :

g معرفة على IR و خاصة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1) = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2)}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x - 4x^3 - 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x - 2x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x - 2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

منه : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x(1-x^2)$ لأن $\dfrac{2}{(x^2+1)^2} > 0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
x	0		+		
$1-x^2$		+	0	-	
$x(1-x^2)$	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		α		$+\infty$
g'(x)		+	0		-		
g(x)	0	+ ↗	$1-\ln 2$	↘ +	0	- ↘	$-\infty$

$$g(0) = 0 - \ln 1 = 0$$

$$g(1) = \frac{2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

حسب جدول تغيرات الدالة g فإن :

g مستمرة على المجال $[1 ; +\infty[$

g متناقصة تماما على $[1 ; +\infty[$

g تأخذ قيم موجبة تماما ثم قيم سالبة تماما على المجال $[1 ; +\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1 ; +\infty[$

حصر α : لنحسب $g(2)$: $g(2) = \frac{8}{5} - \ln 5 = -0{,}009$

$g(1{,}9)$: $g(1{,}9) = \frac{7{,}22}{4{,}61} - \ln(4{,}61) = 0{,}03$

إذن : $g(1{,}9) \times g(2) < 0$ منه : $1{,}9 < \alpha < 2$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	0		α		$+\infty$
g(x)	0	+	0	-	

3 ـ
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

بوضع $x^2 = y$ إذن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 = \lim_{y \to 0} y$،

4 ـ حسب السؤال السابق $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين و عددها المشتق هو 1

منه المنحنى (C) يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 0 و معادلته : $y = 1(x - 0) + f(0)$

أي : $y = x$

5 ـ ليكن $x > 0$ إذن :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

$$= \frac{\ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$= \frac{\ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$ و هو المطلوب

6 ـ
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

7 ـ f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2+1} \times x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{\dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

8 ـ لدينا : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$ كمايلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ كمايلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$	$\searrow$	0

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$$

ملاحظة : العدد α هو حل للمعادلة $g(x) = 0$ إذن : $g(\alpha) = 0$

أي : $\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$ منه : $\ln(\alpha^2+1) = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$

إذن : $f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+1)} = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

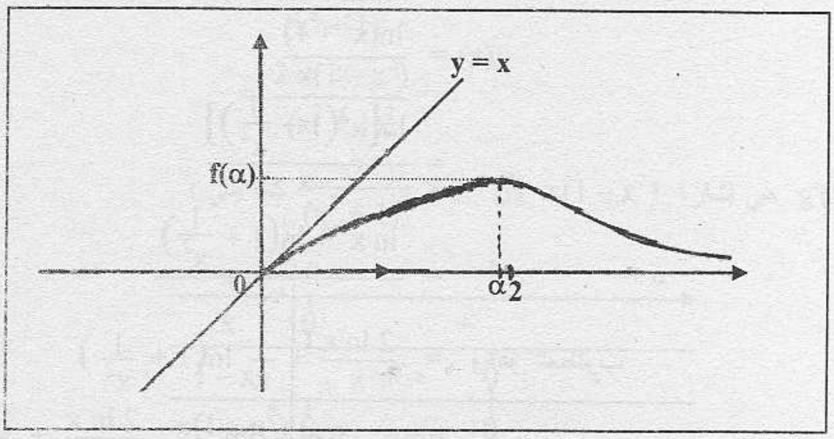
و عليه يمكن حصر $f(\alpha)$ كمايلي :

$1,9 < \alpha < 2$ إذن : $\left.\begin{matrix} 3,8 < 2\alpha < 4 \\ 3,61 < \alpha^2 < 4 \end{matrix}\right\}$ منه : $\left.\begin{matrix} 3,8 < 2\alpha < 4 \\ 4,61 < \alpha^2 + 1 < 5 \end{matrix}\right\}$

منه : $\left.\begin{matrix} 3,8 < 2\alpha < 4 \\ \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{\alpha^2+1} < \dfrac{1}{4,61} \end{matrix}\right\}$ منه : $\dfrac{3,8}{5} < \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} < \dfrac{4}{4,61}$

أي : $0,76 < f(\alpha) < 0,86$

الإنشاء :



التمرين – 11

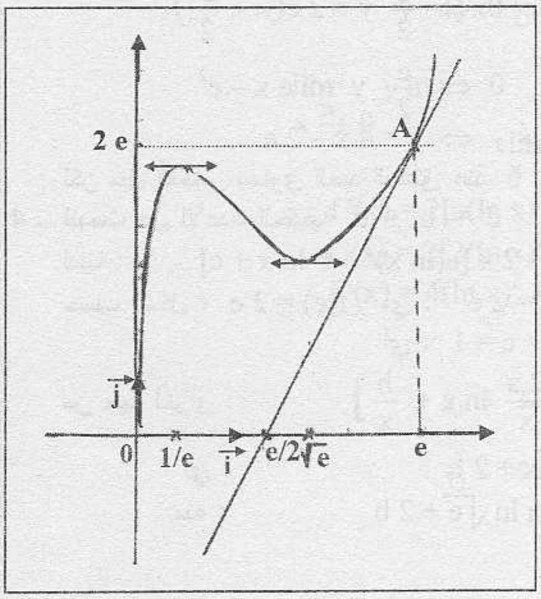
1 – بين أن من أجل كل $x > 0$: $e^{2x} - 1 > 0$

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$

2 – أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

على الرسم أيضا مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة e و يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $e/2$. نقبل أن : $f(x) = 2x\,[a(\ln x)^2 + b \ln x + c]$ حيث a ؛ b ؛ c أعداد حقيقية .



3 – باستعمال الشكل عين $f'(1/e)$ ؛ $f'(\sqrt{e})$ و $f'(e)$

4 – إستنتج أن : $f(x) = 2x\,[2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2]$

5 – عين نهاية f عند 0

6 – عين نهاية f عند $+\infty$

7 – بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1)$

8 – أدرس إشارة $f'(x)$ ثم إستنتج جدول تغيرات الدالة f

لتكن ϕ الدالة المعرفة على $[0,1 ; 0,3]$ بـ $\phi(x) = f(x) - g(x)$

9 – بين أن : من أجل كل x من المجال $[0,1 ; 0,3]$: $\phi'(x) > 0$

10 – بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا واحدا α على المجال $[0,1 ; 0,3]$

11 – بين أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$

نعتبر الدالة h المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $h(x) = g \circ f(x)$

12 – عين نهايات الدالة h عند 0 و $+\infty$

13 – أدرس إتجاه تغير الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$

14 – بين أن : $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$

الحـل – 11

1 – ليكن $x > 0$ إذن : $2x > 0$ منه $e^{2x} > e^0$ أي $e^{2x} > 1$ أي $e^{2x} - 1 > 0$

2 – تغيرات الدالة g على $]0 ; +\infty[$: g معرفة على IR^* و خاصة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{e^{2x} - 1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

لأن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} e^{2x} - 1 = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x} - 1} = 0$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{0 - 2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

منه : $g'(x) < 0$ من أجل كل $x > 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0

3 – حسب الشكل فإن النقط ذات الفواصل $1/e$ و $\sqrt{e}$ هي ذروات للمنحنى (C)

منه : $f'(1/e) = 0$ و $f'(\sqrt{e}) = 0$

حسب الشكل دائما مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e يمر من النقطتين $A(e ; 2e)$ و $B(e/2 ; 0)$

إذن يمكن البحث عن معادلته كمايلي : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} e - \frac{e}{2} \\ 2e - 0 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} e/2 \\ 2e \end{pmatrix}$

لتكن $M(x\,;y)$ نقطة من المستوي إذن : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - \frac{e}{2} \\ y \end{pmatrix}$

إذن : تكون M نقطة من المماس إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BM} \,||\, \overrightarrow{BA}$ أي :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{e}{2} & \frac{e}{2} \\ y & 2e \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{2}\ y = 2e\left(x - \frac{e}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{2}\ y = 2ex - e^2$$

$\Leftrightarrow y = 4x - 2e$ و هي معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة e

لكن ميل المماس يساوي العدد المشتق عند e إذن : $f'(e) = 4$

4 ــ لنبحث عن الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c

لدينا : $f(x) = 2x\,[a(\ln x)^2 + b\ln x + c]$

حسب الشكل : $f(e) = 2e$ أي : $2e\,[a(\ln e)^2 + b\ln e + c] = 2e$

أي : $a + b + c = 1$ ……… (1)

من جهة أخرى : $f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b\ln x + c] + 2x\left[\frac{2a}{x}\ln x + \frac{b}{x}\right]$

أي : $f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b\ln x + c] + 4a\ln x + 2b$

منه : $f'(\sqrt{e}) = 2[a(\ln\sqrt{e})^2 + b\ln\sqrt{e} + c] + 4a\ln\sqrt{e} + 2b$

$$= 2\left[\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right] + \frac{4a}{2} + 2b$$

$$= \frac{a}{2} + b + 2c + 2a + 2b$$

$$= \frac{5}{2}a + 3b + 2c \,……….\, (2)$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 2\left[a\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 + b\ln\frac{1}{e} + c\right] + 4a\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 2b$$

$$= 2[a - b + c] - 4a + 2b$$

$$= -2a + 2c \,………\, (3)$$

لكن $\left.\begin{matrix} f'(\sqrt{e}) = 0 \\ f'(1/e) = 0 \end{matrix}\right\}$ إذن :

العلاقة (3) تصبح : $2c = 2a$ أي $c = a$ إذن : العلاقتين (1) و (2) تصبح :

$\begin{cases} a + b + a = 1 \\ \frac{5}{2}a + 3b + 2a = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ \frac{9}{2}a + 3b = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases}$

منه $\begin{cases} 12a + 6b = 6 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} 3a = 6 \\ b = \frac{-9a}{6} \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{-18}{6} = -3 \end{cases}$

نتيجة : $a = 2$ ؛ $b = -3$ ؛ $c = 2$

منه : $f(x) = 2x\,[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ و هو المطلوب

5 ــ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 4x(\ln x)^2 - 6x\ln x + 4x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0\\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 4x = 0\end{array}\right\}\text{ لأن }\quad = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 4x(\ln x)^2$$

$$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 4(\sqrt{x})^2(\ln\sqrt{x}^{\,2})^2$$

$$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 4(\sqrt{x})^2(2\ln\sqrt{x})^2$$

$$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 16(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$$

$$y = \sqrt{x}\ \text{ بوضع }\quad = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} 16(y\ln y)^2$$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} y\ln y = 0\ \text{ لأن }\quad = 0$$

6 — $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x\ln x\left[2\ln x - 3 + \dfrac{2}{\ln x}\right] = +\infty$

7 — من أجل كل $x > 0$ لدينا : $f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b\ln x + c] + 4a\ln x + 2b$

أي : $f'(x) = 2[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] + 8\ln x - 6$

أي : $f'(x) = 4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2$

لنحلل كثير الحدود $4t^2 + 2t - 2$ كما يلي :

$$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad \text{ إذن : }\left\{\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-2-6}{8} = -1\\[2mm] t_2 = \dfrac{-2+6}{8} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

منه : $4t^2 + 2t - 2 = 4(t+1)(t - \dfrac{1}{2})$

$= 2(t+1)(2t-1)$

إذن : بوضع $t = \ln x$ نحصل على : $4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2 = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$

أي : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$ و هو المطلوب

8 — **إشارة $f'(x)$:**

$\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

$\Leftrightarrow x \geq 1/e$

$2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1/2$

$\Leftrightarrow x \geq e^{1/2}$

$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$

منه جدول الإشارة التالي :

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$\ln x + 1$		-	0	+			
$2\ln x - 1$				-	0	+	
$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$		+	0	-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0\,;+\infty[$

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$14/e$	↘	$2\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}(2 + 3 + 2) = \frac{14}{e} \approx 5{,}15$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2\right] = 2\sqrt{e} \approx 3{,}29$$

9 ـــ من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل $x > 0$ و خاصة من أجل $x \in [0,1 \,;\, 0,3]$

إذن $-g'(x) > 0$ من أجل $x \in [0,1 \,;\, 0,3]$

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن $f'(x) > 0$ من أجل كل $0 < x < 1/e$ و خاصة من أجل $x \in [0,1 \,;\, 0,3]$

لأن $0,3 < 1/e$ حيث $1/e = 0,36$

إذن : من أجل كل $x \in [0,1 \,;\, 0,3]$: $f'(x) > 0$

نتيجة : من أجل كل x من $[0,1 \,;\, 0,3]$: $\left.\begin{array}{l} -g'(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{array}\right\}$

إذن : من أجل كل x من $[0,1 \,;\, 0,3]$: $f'(x) - g'(x) > 0$ أي $\phi'(x) > 0$

إذن : ϕ متزايدة تماما على $[0,1 \,;\, 0,3]$

10 ـــ $\phi(0,1) = f(0,1) - g(0,1) = 3,9 - 4,51 = -0,61$

$\phi(0,3) = f(0,3) - g(0,3) = 5,10 - 1,21 = 3,89$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} \phi \text{ مستمرة على } [0,1 \,;\, 0,3] \\ \phi(0,1) \times \phi(0,3) < 0 \\ \phi \text{ متزايدة تماما على } [0,1 \,;\, 0,3] \end{array}\right.$

إذن : المعادلة $\phi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,1 \,;\, 0,3[$

لكن : $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

إذن : المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,1 \,;\, 0,3[$

11 ـــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج ما يلي :

لما $x \in]0 \,;\, 1/e]$ فإن $f(x) \in]0 \,;\, 14/e]$

لما $x \in [1/e \,;\, \sqrt{e}\,]$ فإن $f(x) \in [2\sqrt{e} \,;\, 14/e]$

لما $x \in [\sqrt{e} \,;\, +\infty[$ فإن $f(x) \in [2\sqrt{e} \,;\, +\infty[$

نتيجة : من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$ و هو المطلوب .

12 ـــ لدينا : $h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)]$

منه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g[f(x)]$

$= \lim\limits_{f(x) \xrightarrow{>} 0} g[f(x)]$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0$ و $f(x) > 0$

$= \lim\limits_{y \xrightarrow{>} 0} g(y)$ بوضع $y = f(x)$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g[f(x)]$

$= \lim\limits_{f(x) \to +\infty} g[f(x)]$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} g(y)$ بوضع $y = f(x)$

$= 0$

13 ـــ لدينا : $h'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$

لكن من أجل $x > 0$ فإن $f(x) > 0$ منه : $g'[f(x)] < 0$ (لأن $g'(x) < 0$ من أجل $x > 0$)

إذن : إشارة $h'(x)$ هي إشارة $[-f'(x)]$ كما يلي :

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

منه : جدول تغيرات الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+\infty \searrow$	$h(1/e)$	$\nearrow$	$h(\sqrt{e})$	$\searrow$	0

14 — لدينا : $h(\alpha) = g[f(\alpha)]$

لكن : $f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = g(\alpha)$ (لأن α هو حل للمعادلة $\phi(x) = 0$)

منه : $h(\alpha) = g[g(\alpha)]$

أي : $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$ و هو المطلوب .

<u>التمرين — 12</u>

1 — أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

2 — أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 — إستنتج أن إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(1/x) > 0$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(1/x) < 0$

لتكن f الدالة المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ln x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

4 — تحقق أن : من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = x\, g(1/x)$

5 — أدرس تغيرات الدالة f

6 — بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $7/4 < \alpha < 2$

7 — تحقق أن المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة $y = x$

8 — أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

9 — أرسم كل من (Δ) و (C)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 \in]0 ; 1[$ و من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$

10 — بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

11 — بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

12 — إستنتج أن (u_n) متقاربة ثم إستنتج نهايتها .

<u>الحل — 12</u>

1 — تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -1 + x + 2\ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{-1}{x} + 1 + 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

إذن : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$ لأن $\left.\begin{array}{l} 1 > 0 \\ \dfrac{2}{x} > 0 \end{array}\right\}$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$	$+\infty$

2 ـ $g(1) = -1 + 1 + 2\ln 1 = 0$

بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3 ـ إذا كان $0 < x < 1$ فإن $\frac{1}{x} > 1$ و حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(\frac{1}{x}) > 0$ لأن $\frac{1}{x} > 1$

إذا كان $x > 1$ فإن $0 < \frac{1}{x} < 1$ و حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(\frac{1}{x}) < 0$ لأن $0 < \frac{1}{x} < 1$

4 ـ من أجل $x > 0$ فإن : $f(x) = x - x^2 \ln x$

إذن : $f'(x) = 1 - \left[2x\ln x + \frac{x^2}{x}\right]$

أي : $f'(x) = 1 - 2x\ln x - x$

أي : $f'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 2\ln x - 1\right)$

أي : $f'(x) = x\left[-1 + \frac{1}{x} + 2\ln(1/x)\right]$ لأن $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

أي : $f'(x) = x\,g(1/x)$ و هو المطلوب .

5 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على $[0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x - x(x\ln x) = 0$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = x\,g(1/x)$ حسب السؤال السابق .

و منه إشارة $f'(x)$ هي كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
x			$+$		
$g(1/x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x) = x\,g(1/x)$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

6 ـ $f(1) = 1 - 1\ln 1 = 1$

$f(2) = 2 - 4\ln 2 = -0{,}77$

$f(7/4) = f(1{,}75) = 1{,}75 - 3{,}06\ln 1{,}75 = 0{,}03$

نتيجة : f مستمرة على $[7/4 ; 2]$

f متناقصة تماما على $[7/4 ; 2]$

$f(2) \times f(7/4) < 0$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $7/4 < \alpha < 2$

7 ـ لنبحث عن العدد المشتق للدالة f عند 0 على اليمين كمايلي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x - x^2\ln x - 0}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 - x\ln x$$

$= 1$ لأن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln x = 0$

إذن : f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين و عددها المشتق هو 1

منه : **نصف المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 على اليمين معادلته :**

$y = 1(x-0) + f(0)$ أي : $y = x$ و هي معادلة (Δ) المطلوبة .

8 ــ وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) : $f(x) - x = x - x^2\ln x - x = -x^2\ln x$

الإشارة :

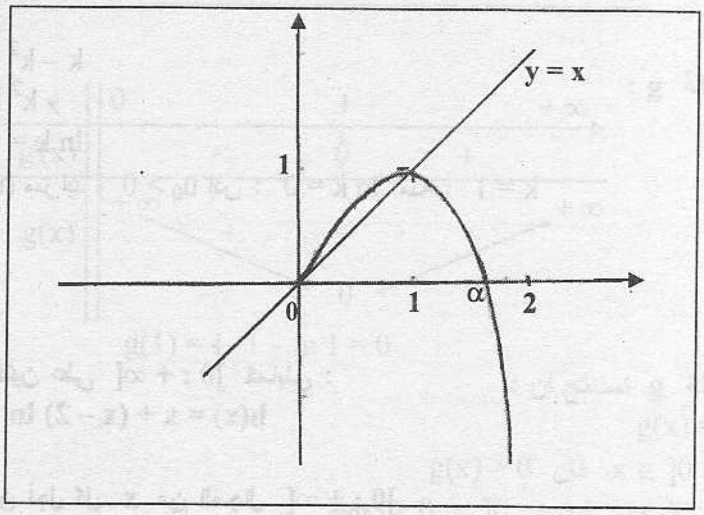
x	0		1		$+\infty$
$-x^2$		-		-	
$\ln x$		-	0	+	
$-x^2\ln x$		+	0	-	

نتيجة : لما $0 < x < 1$: المنحنى (C) فوق المماس (Δ)

لما $x = 1$: المنحنى (C) يقطع المماس (Δ)

لما $x > 1$: المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

9 ــ الإنشاء :



لاحظ أن النقطة ذات الفاصلة $e^{-3/2}$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $(e^{-3/2} \approx 0,21)$

الإثبات :

$$f'(x) = 1 - 2x\ln x - x$$

$$f''(x) = -2\ln x - \frac{2x}{x} - 1 = -2\ln x - 3$$

منه : $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2\ln x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leq -3/2$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-3/2}$

منه جدول إشارة $f''(x)$:

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

إذن : f'' تنعدم عند $e^{-3/2}$ و تغير إشارتها .

منه : النقطة ذات الإحداثيات $(e^{-3/2} ; f(e^{-3/2}))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C)

10 ــ البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n : $0 < u_n < 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 < u_0 < 1$ إذن الخاصية محققة .

من أجل $n = 1$ لدينا : $0 < u_0 < 1$ إذن $0 < f(u_0) < 1$ أي $0 < u_1 < 1$ (حسب جدول تغيرات الدال f)

منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $0 < u_n < 1$ من أجل $n > 1$

هل $0 < u_{n+1} < 1$ ؟

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذن : $0 < f(u_n) < 1$ أي $0 < u_{n+1} < 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من IN فإن $0 < u_n < 1$

ملاحظة : استعملنا الخاصية التالية : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $0 < f(x) < 1$ و هذا حسب جدول تغيرات الدالة f

11 ــ حسب السؤال (8) لدينا من أجل $0 < x < 1$ فإن $f(x) - x > 0$

أي من أجل $0 < x < 1$ فإن $f(x) > x$

لكن $0 < u_n < 1$ إذن : $f(u_n) > u_n$ أي $u_{n+1} > u_n$

منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

12 ــ لدينا : (u_n) محدودة من الأعلى بـــ 1 لأن $u_n < 1$

(u_n) متزايدة تماما .

إذن : (u_n) متقاربة .

البحث عن النهاية :

لتكن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = k$ حيث $0 < k \leq 1$

إذن : لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n = k$

أي : $f(k) = k$

منه : $k - k^2 \ln k = k$

أي : $-k^2 \ln k = 0$

أي : $k = 0$ أو $\ln k = 0$

لكن $k \neq 0$ لأن (u_n) متزايد و $u_0 > 0$ إذن : $\ln k = 0$ منه : $k = 1$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

<u>التمرين ــ 13</u>

<u>الجزء I</u>

لتكن g و h الدالتين المعرفتين على $]0 ; +\infty[$ كمايلي :

$g(x) = x - 1 - \ln x$ ؛ $h(x) = x + (x - 2) \ln x$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g

2 ــ إستنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$

3 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1) \ln x$

4 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $(x - 1) \ln x \geq 0$

5 ــ إستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

<u>الجزء II</u>

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بــ $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3 ــ بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

4 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f

5 ــ عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 1

6 ــ تحقق أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) - x = (\ln x - 1) g(x)$

7 ــ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المماس (Δ)

8 ــ أنشئ (C) علما أن (C) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1,5

الجزء III

(u_n) متتالية معرفة كمايلي : $u_0 = \sqrt{e}$ و من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$

1 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل $n \in IN$: $1 < u_n < e$

2 ـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

3 ـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

الحـل ـ 13

1 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x - 1 - \ln x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ على $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $(x-1)$ لأن $x > 0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
		$+$		$+$	

$g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

لما $x = 1$ فإن $g(x) = 0$

لما $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$

نتيجة : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $g(x) \geq 0$

3 ـ من أجل كل $x \in]0 ; +\infty[$ فإن :

$$\begin{aligned} h(x) &= x + (x-2)\ln x \\ &= x + x\ln x - 2\ln x \\ &= x + x\ln x - \ln x - \ln x \\ &= x - \ln x + (x-1)\ln x \\ &= 1 - 1 + x - \ln x + (x-1)\ln x \\ &= 1 + g(x) + (x-1)\ln x \end{aligned}$$

و هو المطلوب .

4 ـ لندرس إشارة $(x-1)\ln x$ على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

نتيجة : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $(x-1)\ln x \geq 0$

5 ـ لاحظ أن إشارة $g(x)$ هي نفسها إشارة $(x-1)\ln x$ إذن في هذه الحالة فقط يمكن إستنتاج إشارة المجموع

$g(x)+(x-1)\ln x$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	
$g(x)+(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

حذار ! هذه الحالة خاصة جدا لأن العددين من نفس الإشارة

نتيجة : من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$: $g(x)+(x-1)\ln x \geq 0$

إذن : $1+g(x)+(x-1)\ln x \geq 1$

و خاصة : $1+g(x)+(x-1)\ln x > 0$ أي $h(x) > 0$

الجزء II

1 ــ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 1 + x\ln x - (\ln x)^2 = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C) على اليمين $(x>0)$

2 ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2\left[\frac{1}{(\ln x)^2} + \frac{x}{\ln x} - 1\right]$$

$= +\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\ln x)^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty\end{array}\right\}$

3 ــ من أجل كل $x>0$: $f'(x) = \ln x + \dfrac{x}{x} - \dfrac{2}{x}\ln x$

أي : $f'(x) = \dfrac{x\ln x + x - 2\ln x}{x}$

أي : $f'(x) = \dfrac{x + (x-2)\ln x}{x}$

أي : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ و هو المطلوب

4 ــ من السؤال (3) لدينا : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ إذن : $f'(x) > 0$ لأن $\left.\begin{array}{l} x>0 \\ h(x)>0\end{array}\right\}$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$					
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

$\begin{cases} f(e) = 1 + e - 1 = e \\ f(1) = 1 \end{cases}$ توضع في جدول التغيرات .

5 ــ لدينا : $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f'(1) = \dfrac{h(1)}{1} = 1 \end{array}\right\}$

منه : معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $y = 1(x-1)+1$ أي : $y = x$

6 ــ ليكن $x>0$:

$$\begin{aligned} g(x)(\ln x - 1) &= (x - 1 - \ln x)(\ln x - 1) \\ &= x\ln x - x - \ln x + 1 - (\ln x)^2 + \ln x \\ &= 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x \\ &= f(x) - x \end{aligned}$$

و هو المطلوب

7 ــ لدينا : $f(x) - x = g(x)(\ln x - 1)$ إذن : إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $g(x)(\ln x - 1)$ كما يلي :

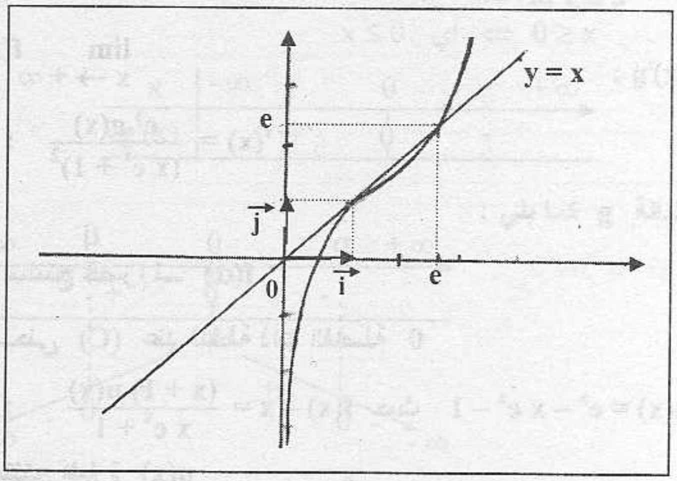
x	0		1		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)(\ln x - 1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

نتيجة : لما $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; e[$: المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

لما $x \in \{1 ; e\}$: المنحنى (C) يقطع المماس (Δ)

لما $x \in]e ; +\infty[$: المنحنى (C) فوق المماس (Δ)

8 ــ الإنشاء :



الجزء III

1 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل $n \in IN$: $1 < u_n < e$

من أجل $n = 0$: $u_0 = \sqrt{e}$ لكن $1 < \sqrt{e} < e$ إذن الخاصية محققة .

من أجل $n = 1$: $u_1 = f(u_0)$ أي $u_1 = f(\sqrt{e})$ إذن : $1 < u_1 < e$

لأن حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل $1 < x < e$ فإن $1 < f(x) < e$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $1 < u_n < e$ من أجل $n > 1$

هل $1 < u_{n+1} < e$ ؟

لدينا $1 < u_n < e$ إذن : $1 < f(u_n) < e$ أي $1 < u_{n+1} < e$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN$: $1 < u_n < e$

2 ــ من أجل كل $n \in IN$ لدينا : $1 < u_n < e$ إذن : $f(u_n) - u_n < 0$

لأن حسب جدول إشارة $f(x) - x$ فإن من أجل $1 < x < e$: $f(x) - x < 0$

أي : من أجل كل $n \in IN$: $f(u_n) < u_n$ أي $u_{n+1} < u_n$

منه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3 ــ لدينا : $\left.\begin{array}{l} u_n \text{ متناقصة .} \\ u_n \text{ محدودة من الأسفل بــ } 1 \end{array}\right\}$

إذن : (u_n) متتالية متقاربة .

لتكن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = k$

إذن : عندما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n = k$ أي $f(k) = k$ أي $f(k) - k = 0$

منه : $k = 1$ أو $k = e$

بما أن المتتالية متناقصة و $u_0 = \sqrt{e}$ فإن $k < \sqrt{e}$

نتيجة : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

التمرين ـ 14

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x\,e^x + 1}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I

لتكن h الدالة المعرفة على IR بـ $h(x) = x\,e^x + 1$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة h ثم إستنتج أن : من أجل كل $x \in IR$: $h(x) > 0$

2 ـ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على IR بـ $g(x) = x + 2 - e^x$

3 ـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان على IR نرمز لهما بـ α و β حيث $\alpha > \beta$

4 ـ بين أن $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

5 ـ إستنتج إشارة $g(x)$

الجزء II

1 ـ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2 ـ بين أن من أجل كل $x \in IR$: $f'(x) = \dfrac{e^x\,g(x)}{(x\,e^x + 1)^2}$

3 ـ إستنتج جدول تغيرات الدالة f

4 ـ بين أن $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

5 ـ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

6 ـ بين أن من أجل كل $x \in IR$: $f(x) - x = \dfrac{(x+1)\,u(x)}{x\,e^x + 1}$ حيث $u(x) = e^x - x\,e^x - 1$

7 ـ أدرس تغيرات الدالة u ثم إستنتج إشارة $u(x)$

8 ـ أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (T)

9 ـ أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$ و $-1{,}19 < f(\beta) < -1{,}18$)

الحـل ـ 14

1 ـ تغيرات الدالة h : h معرفة على IR

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} x\,e^x + 1 = 1$ لأن $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} x\,e^x + 1 = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} x\,e^x = +\infty$

h قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = e^x + x\,e^x = e^x(1 + x)$$

منه : إشارة $h'(x)$ هي إشارة $(1 + x)$ لأن $e^x > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1 + x$		$-$	0	$+$	

منه : جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	↘	$\dfrac{e-1}{e}$	↗	$+\infty$

$$h(-1) = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن من أجل كل $x \in IR$ فإن $h(x) \in \left[\dfrac{e-1}{e} ; +\infty\right[$

أي : $h(x) \geq \frac{e-1}{e}$ و خاصة : $h(x) > 0$

2 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty\end{array}\right\}$

g قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $g'(x) = 1 - e^x$

إذن : $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \geq e^x$

$\Leftrightarrow \ln 1 \geq x$

$\Leftrightarrow 0 \geq x$ أي $x \leq 0$

منه جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$	β		0		α	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	1	↘	0	↘ $-\infty$

$g(0) = 0 + 2 - e^0 = 1$

3 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تنعدم مرتين

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

4 ـ $g(1,14) = 1,14 + 2 - e^{1,14} = 3,14 - e^{1,14} = 0,01$

$g(1,15) = 1,15 + 2 - e^{1,15} = 3,15 - e^{1,15} = -0,008$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l}g \text{ مستمرة على } [1,14 ; 1,15] \\ g \text{ متناقصة تماما على } [1,14 ; 1,15] \\ g(1,14) \times g(1,15) < 0\end{array}\right.$

إذن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين 1,14 و 1,15

منه : $1,14 < \alpha < 1,15$

5 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II

1 ـ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} = \frac{-1}{1} = -1$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0\end{array}\right\}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

2 ـ من أجل كل $x \in IR$: $f'(x) = \frac{e^x(x e^x + 1) - (e^x + x e^x)(e^x - 1)}{(x e^x + 1)^2}$

$$= \frac{e^x[x\,e^x + 1 - (1+x)(e^x - 1)]}{(x\,e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x\,e^x + 1 - e^x + 1 - x\,e^x + x)}{(x\,e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(x\,e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x\,g(x)}{(x\,e^x+1)^2}$$ و هو المطلوب

3 ــ لدينا $f'(x) = \dfrac{e^x\,g(x)}{(x\,e^x+1)^2}$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ فقط لأن $e^x > 0$ و $(x\,e^x+1)^2 > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4 ــ لدينا : $f(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha\,e^\alpha + 1}$ ..... (1) حيث $g(\alpha) = 0$

لكن : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$\Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على : $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha+2)-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$

أي : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$ أي $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$ أي $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$

منه الحصر التالي : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$ إذن : $2{,}14 < \alpha + 1 < 2{,}15$

منه : $\dfrac{1}{2{,}15} < \dfrac{1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{2{,}14}$ أي $0{,}465 < f(\alpha) < 0{,}467$

5 ــ
$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1-1}{0+1} = 0 \\ f'(0) = \dfrac{0+2-1}{1} = 1 \end{cases}$$

منه : معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = 1(x-0)+0$ أي : $y = x$

6 ــ ليكن $x \in IR$:

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{x\,e^x + 1} - x$$

$$= \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{x\,e^x+1}$$

$$= \frac{e^x(1 - x^2) - (1+x)}{x\,e^x+1}$$

$$= \frac{e^x(1+x)(1-x) - (1+x)}{x\,e^x+1}$$

$$= \frac{(1+x)[e^x(1-x) - 1]}{x\,e^x+1}$$

$$= \frac{(1+x)(e^x - x\,e^x - 1)}{x\,e^x + 1}$$

$$= \frac{(1+x)\,u(x)}{x\,e^x + 1}$$ و هو المطلوب

7 ــ تغيرات الدالة u : u معرفة على IR

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x\,e^x - 1 = -1$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0 \end{array}\right\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

u قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$u'(x) = e^x - e^x - x\,e^x = -x\,e^x$$

منه إشارة $u'(x)$ هي إشارة $(-x)$ فقط لأن $e^x > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة u كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	
$u(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

$$u(0) = 1 - 0 - 1 = 0$$

حسب جدول تغيرات الدالة u نستنتج إشارة $u(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		-	0	-	

8 ــ الوضعية النسبية لـ (T) و المنحنى (C)

لدينا : $f(x) - x = \frac{(1+x)\,u(x)}{x\,e^x + 1}$

إذن : إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $(1+x)\,u(x)$ لأن حسب السؤال (1) من الجزء I فإن $x\,e^x + 1 > 0$ كمايلي :

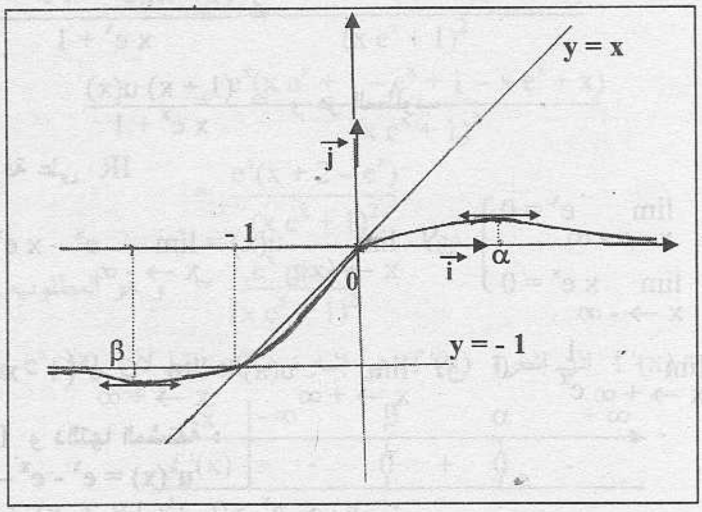
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$1 + x$		-	0		+		
$u(x)$				-	0	-	
$f(x) - x$		+	0	-	0	-	

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; -1[$: المنحنى (C) فوق المماس (T)

لما $x \in \{-1 ; 0\}$: المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما $x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$: المنحنى (C) تحت المماس (T)

9 ـ الإنشاء :



التمرين ــ 15

الجزء I

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C)

2 ـ من أجل $x > 0$ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟

3 ـ بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4} e^{-1/x}$

4 ـ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

الجزء II

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = f(x) - x f'(x)$

1 ـ بين أن المعادلتين $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ـ بين أن المعادلة $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $]0 ; +\infty[$

3 ـ بين أن $f'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

نرمز بـ (T_α) إلى مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α

4 ـ بين أن معادلة المماس (T_α) هي : $y = x f'(\alpha)$

5 ـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

الحـل ــ 15

1 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1/x}$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^2} = 1$

$= \lim\limits_{y \to 0} e^{y} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{y \to 0} y$

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2+x+1}{x^3} e^{-1/x}$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^3 e^{1/x}} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 + x = 0$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(1/x)^3}{e^{1/x}}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y^3}{e^y} \quad \text{نضع} \quad y = 1/x \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = \lim_{y \to +\infty} y$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^3} = +\infty$$

إذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين و عددها المشتق يساوي 0

منه : المنحنى (C) يقبل نصف مماس على اليمين عند النقطة ذات الفاصلة 0

و معادلته $y = f(0)$ أي $y = 0$ (محور الفواصل) .

3 ـ

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2+x+1)}{x^4} e^{-1/x} - \left(\frac{-1}{x^2} e^{-1/x}\right) \frac{x^2+x+1}{x^2}$$

$$= \frac{e^{-1/x}}{x^4} (2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1)$$

$$= e^{-1/x} \left(\frac{1-x}{x^4}\right) \quad \text{و هو المطلوب}$$

4 ـ لدينا $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-1/x}$ إذن : **إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - x$ كما يلي :**

x	0		1		$+\infty$
1 - x	‖	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	3/e	↘	1

$$f(1) = \frac{1+1+1}{1} e^{-1} = 3/e$$

الجزء II

1 ـ

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x} - x\left(\frac{1-x}{x^4}\right) e^{-1/x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x} - \frac{(1-x)}{x^3} e^{-1/x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^2}\left(x^2 + x + 1 - \frac{1-x}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^2}\left(\frac{x^3 + x^2 + x - 1 + x}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x^3 + x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{لأن} \quad \frac{e^{-1/x}}{x^3} \neq 0 \quad \text{و هو المطلوب}$$

2 ـ **لندرس تغيرات الدالة u المعرفة على IR بـ $u(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$**

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$u'(x) = 3x^2 + 2x + 2$$

إشارة $u'(x)$: $\Delta = 4 - 24 < 0$

إذن : من أجل كل x من IR : $u'(x) > 0$

منه **جدول تغيرات الدالة u كما يلي :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة u نلاحظ أن u متزايدة تماما على IR و تأخذ قيم سالبة ثم قيم موجبة إذن تنعدم مرة واحدة من أجل α

لدينا : $\left.\begin{array}{r} u(0) = -1 \\ u(0,5) = 0,125 + 0,25 + 1 - 1 = 0,375 \end{array}\right\}$

إذن : $\left.\begin{array}{r} u(0) \times u(0,5) < 0 \\ u \text{ مستمرة على } [0 ; 0,5] \end{array}\right\}$

منه : يوجد α من المجال $]0 ; 0,5[$ حيث $u(\alpha) = 0$ و هو المطلوب لأن $]0 ; 0,5[\subset]0 ; +\infty[$

3 ـ لدينا : (1) .... $f'(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha^4} e^{-1/\alpha}$

لكن : $u(\alpha) = 0$ أي $\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$

أي : $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \alpha - 1 = 0$

منه : $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1 - \alpha$

نعوض $(1-\alpha)$ بـ $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$ في المساواة (1) فنحصل على : $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha}{\alpha^4} e^{-1/\alpha}$

أي $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^3} e^{-1/\alpha}$

أي $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} e^{-1/\alpha}\right)$

أي : $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} f(\alpha)$ و هوالمطلوب

4 ـ معادلة المماس (T_α) تكتب من الشكل : $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

أي : $y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$

أي : $y = x f'(\alpha) + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$

أي : $y = x f'(\alpha)$ لأن $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$ حيث α هو حل للمعادلة $f(x) - x f'(x) = 0$ المكافئة للمعادلة $u(x) = 0$

ملاحظة : يمكن أيضا استعمال نتيجة السؤال السابق كمايلي :

لدينا $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} f(\alpha)$

منه $\alpha f'(\alpha) = f(\alpha)$

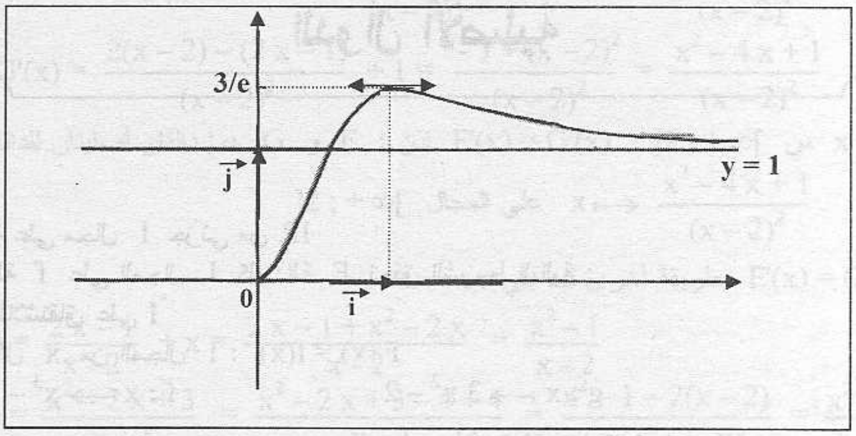
أي $\alpha f'(\alpha) - f(\alpha) = 0$

أي : $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$

5 ـ لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حسب قيم m نبحث عن عدد نقط تقاطع المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y = m$ حيث $m \in IR$ مع منحنى الدالة f

إذن : نرسم أولا المنحنى (C) كما يلي :

حذار ! نبحث على حلول المعادلة $f(x) = m$ على المجال $]0 ; +\infty[$ فقط !



المناقشة :

لما $m \in]-\infty ; 0[$: المعادلة لا تقبل حلول .

لما $m = 0$: المعادلة تقبل حلا معدوما .

لما $m \in]0 ; 1]$: المعادلة تقبل حلا موجبا .

لما $m \in]1 ; 3/e[$: المعادلة تقبل حلين مختلفين موجبين .

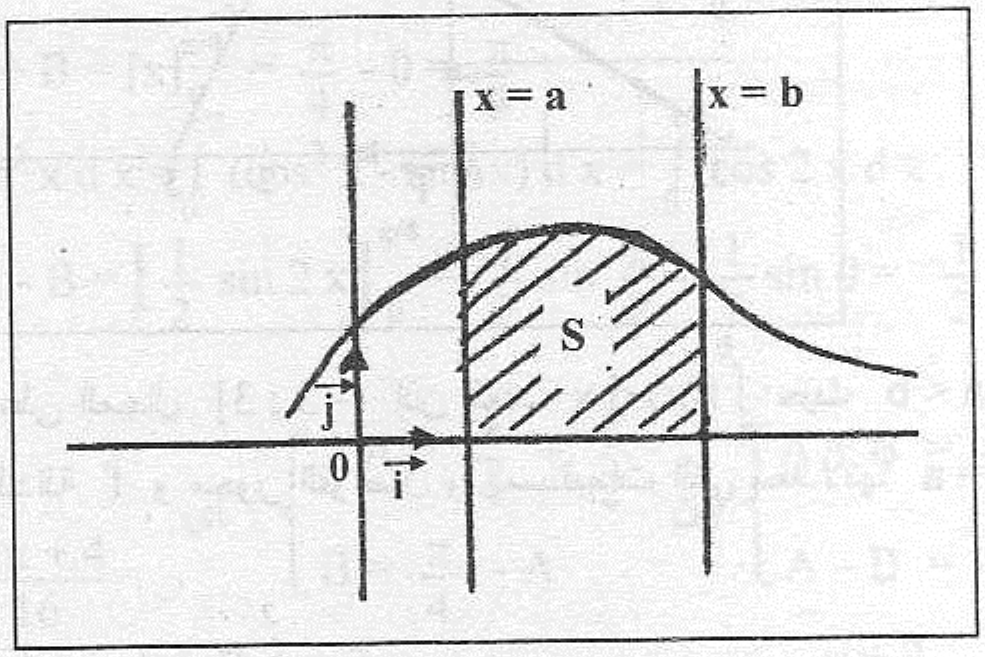
لما $m = 3/e$: المعادلة تقبل حلا واحدا يساوي 1

لما $m \in]3/e ; +\infty[$: المعادلة لا تقبل حلولا .

الحساب التكاملي

Kimou.

خاصية أساسية : f دالة مستمرة و موجبة على مجال جزئي I من IR و (C) منحناها في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I حيث $a < b$ ،
العدد الحقيقي الموجب S حيث $S = [F(b) - F(a)] \times ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$ يعبر عن مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ مقدرا بـ وحدة قياس المساحة حسب مقياس أشعة التوجيه حسب الشكل التالي :
الجزء الملون يمثل حيز المستوي S المحصور بين المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$



التكامل المحدود :
حسب الخاصية السابقة $S = F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f
لتكن G دالة أصلية أخرى للدالة f
هل $S = G(b) - G(a)$ ؟
الجواب : بما أن F و G دالتان أصليتان لـ f فإن $G(x) = F(x) + k$ حيث $k \in IR$
إذن :
$$G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k]$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= S$$
نتيجة : مساحة الحيز S لا تتعلق باختيار الدالة الأصلية للدالة f
إذن العدد S مستقل عن الدالة الأصلية F
تعريف : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I و كانت F دالة أصلية لـ f على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I العدد $F(b) - F(a)$ يسمى التكامل المحدود من a إلى b للدالة f و نرمز له بـ
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
ملاحظة : الكتابة $\int_a^b f(x)\,dx$ تقرأ : تكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x
مثلا : $f : x \longmapsto 3x^2$
f مستمرة على IR و $F : x \longmapsto x^3$ هي دالة أصلية لـ f على IR
إذن :
$$\int_1^0 f(x)\,dx = F(0) - F(1)$$
$$= (0)^3 - (1)^3$$
$$= -1$$
ملاحظة : بالرجوع إلى خاصية المساحة فإن $S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ حيث $a < b$ و f مستمرة و موجبة على المجال $[a ; b]$

تبسيط الكتابة : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال [a ; b] فإن العدد F(b) – F(a) يمكن كتابته $[F(x)]_a^b$

و عليه $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

أمثلة :

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2\right] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 e^{2x-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{2-1} - \frac{1}{2}e^{0-1} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2-1}{2e}$$

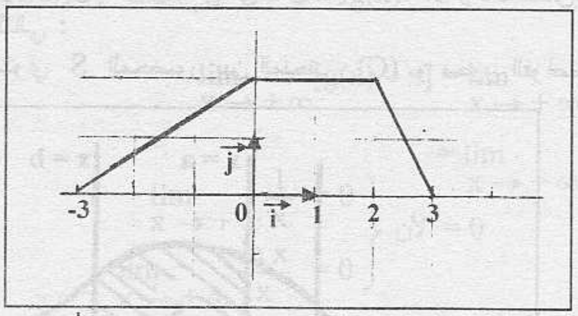
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = (-\cos\pi) - [-\cos(-\pi)] = 1 - 1 = 0$$

أمثلة بيانية : باستعمال المنحنى التالي لدالة f أحسب التكاملات التالية :

1– $\int_0^1 f(x)\,dx$

2– $\int_1^2 f(x)\,dx$

3– $\int_0^2 f(x)\,dx$

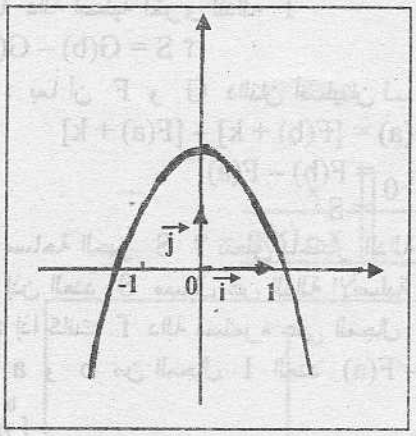


الحـل : لاحظ أن الدالة f مستمرة و موجبة على المجال [-3 ; 3] إذن العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ حيث $a < b$ يعبر عن مساحة الحيز من المستوي المحدود بـ المنحنى (C) للدالة f و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ إذن يكفي إجراء قراءة بيانية لهذه المساحة كمايلي :

$\int_0 f(x)\,dx = 2$ ؛ $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$ ؛ $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

نشاط :

باستعمال الحاسبة البيانية إليك المنحنى (C) الممثل للدالة f حيث $f(x) = 2 - x^2$ في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$
حيث $\|\vec{i}\| = 2\,cm$ و $\|\vec{j}\| = 1,5\,cm$
المطلوب : أحسب مساحة حير المستوي المحصور بين المنحنى (C)
و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ ؛ $x = 1$



الحـل :

لاحظ أن المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل على المجال [-1 ; 1]

إذن : الدالة f موجبة على المجال [-1 ; 1] إذن :

المساحة المطلوبة هي : $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\,cm^2$

أي : $S = \int_{-1}^{1} (2 - x^2)\,dx \times 2 \times 1,5\,cm^2$

لدينا : $\int_{-1}^{1} (2 - x^2)\,dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$

$= \left(2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

منه : $S = \frac{10}{3} \times 2 \times 1,5\,cm^2 = 10\,cm^2$

خواص التكامل المحدود :

لتكن f و g دالتان مستمرتان على مجال I . a ، b ، c أعداد حقيقية من المجال I . k عدد حقيقي كيفي . لدينا

الخواص التالية :

1 ـ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$: علاقة شال .

2 ـ $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$: خطية التكامل المحدود .

3 ـ $\int_a^b k\,.\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$: خطية التكامل المحدود .

4 ـ إذا كان $a < b$ و f موجبة على $[a\,;b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

5 ـ إذا كان $a < b$ و من أجل كل x من $[a\,;b]$: $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

مثال ـ 1

ليكن $A = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx$ و $B = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx$

باستعمال الخواص أحسب $A+B$ ثم $A-B$ إستنتج قيم A و B

الحل ـ 1

$$A+B = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx + \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/4} 1\,.\,dx$$

إذن : $A+B = [x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

$$A-B = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$$

إذن : $A-B = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$

نتيجة : $\begin{cases} A+B = \frac{\pi}{4} \\ A-B = \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \\ B = \frac{\pi}{4} - A \end{cases}$ أي $\begin{cases} A = \frac{2\pi+4}{16} \\ B = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi+4}{16} \end{cases}$

أي $\begin{cases} A = \frac{\pi+2}{8} \\ B = \frac{2\pi}{8} - \frac{\pi+2}{8} \end{cases}$ منه $\begin{cases} A = \frac{\pi+2}{8} \\ B = \frac{\pi-2}{8} \end{cases}$

مثال ـ 2

ليكن $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

باستعمال الخواص أثبت أن $0 < A \leq 1$

الحل ـ 2

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$ موجبة تماما على $[0\,;1]$ إذن : $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx > 0$

من جهة أخرى : من أجل كل x من $[0\,;1]$ فإن : $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \leq \int_0^1 1\,.\,dx$ أي $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \leq [x]_0^1$ أي : $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \leq 1$

نتيجة : $0 < \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \leq 1$ أي $0 < A \leq 1$.

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف : f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$

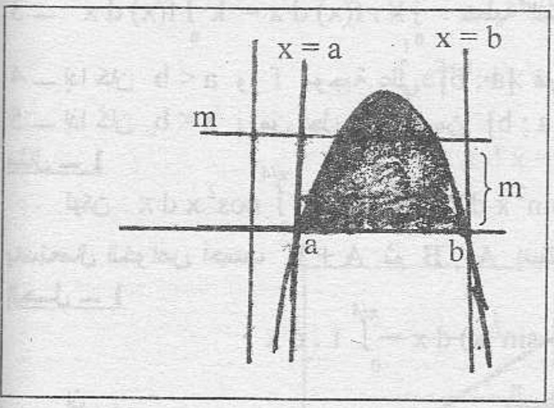
العدد الحقيقي m المعرف بـ $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a\,;b]$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة و موجبة على المجال $[a\,;b]$ و كان (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$ فإن مساحة الحيز S المحصور بـ (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ و $x=b$

هي $S = \int_a^b f(x)\,dx$

إذن : القيمة المتوسطة m للدالة f على [a ; b] هي : $m = \dfrac{S}{b-a}$

أي : $S = m(b-a)$



التفسير الهندسي :

$S = \int_a^b f(x)\,dx$ هي مساحة الجزء الملون

إذا كان $S = m(b-a)$ فإن S هي مساحة المستطيل الذي طوله $(b-a)$ و عرضه m (أنظر الشكل)

نتيجة : إذا وجد عددين حقيقيين m و M حيث من أجل كل x من [a ; b] :

$m \le f(x) \le M$ فإن $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

مثال :

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \ln(1+x)$

1 ــ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال [0 ; e - 1]

2 ــ إستنتج حصرا لـ f(x) على المجال [0 ; e - 1]

3 ــ إستنتج حصرا للعدد $A = \int_1^{e-1} f(x)\,dx$

الحل :

1 ــ f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و خاصة على المجال [0 ; e - 1] و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

إذن : f متزايدة تماما على [0 ; e - 1] لأن $\dfrac{1}{x+1} > 0$

2 ــ منه : من أجل كل x من [0 ; e - 1] : $f(0) \le f(x) \le f(e-1)$

أي : $1 + \ln(1) \le f(x) \le 1 + \ln(1 + e - 1)$

أي : $1 \le f(x) \le 2$

3 ــ $1 \le f(x) \le 2$ إذن : حسب خاصية القيمة المتوسطة على المجال [1 ; e - 1] فإن :

$$1(e-1-1) \le \int_1^{e-1} f(x)\,dx \le 2(e-1-1)$$

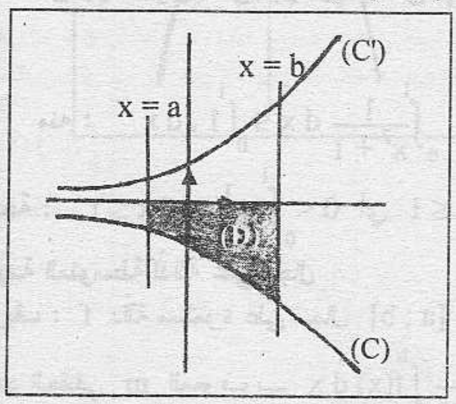
أي : $(e-2) \le A \le 2(e-2)$ و هو المطلوب .

ملاحظة : إذا أردنا حصر القيمة المتوسطة على المجال [0 ; e - 1] نحصل على :

$1(e-1-0) \le \int_0^{e-1} f(x)\,dx \le 2(e-1-0)$ أي $e-1 \le \int_0^{e-1} f(x)\,dx \le 2(e-1)$

تكامل دالة سالبة على مجال

f دالة مستمرة سالبة على مجال [a ; b] . ليكن (C) منحناها في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$



نرمز بـ A إلى مساحة حيز المستوي (D) المحدود بـ المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها x = a ؛ x = b

للبحث عن A نرسم نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل و ليكن (C') هذا المنحنى إذن (C') له المعادلة $y = -f(x)$

منه : $A = \int_a^b -f(x)\,dx$ لأن (C') فوق محور الفواصل أي الدالة f - موجبة .

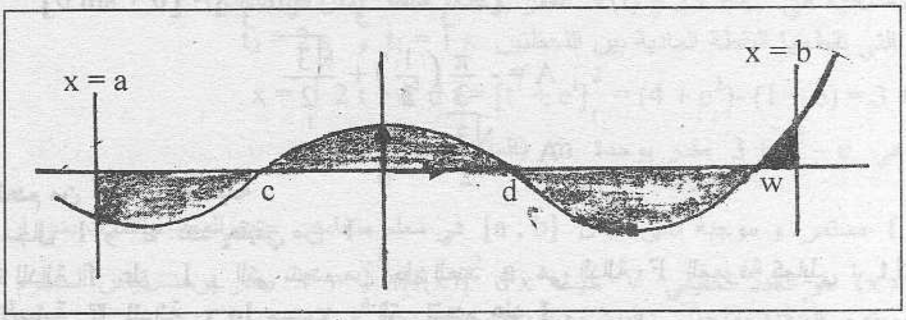
نقول أن المساحة الجبرية للحيز (D) سالبة لأن الدالة f سالبة على المجال [a ; b]

تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال [a ; b] و (C) منحناها في معلم متعامد كما هو موضح في الشكل .

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز (D) من المستوي المحدود بـ المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها x = a ؛ x = b

لحساب A نجزء الحيز (D) حسب إشارة f(x) أي موضع المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل ثم نعبر عن المساحة A على كل مجال . حسب الشكل التالي مثلا :



$$A = \int_a^c - f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^w - f(x)\,dx + \int_w^b f(x)\,dx$$

إذن : تم تقسيم الحيز (D) إلى 4 مجالات حسب وضع المنحنى (C) بالنسبة لمحور الفواصل

مثال : f دالة معرفة بـ $f(x) = -e^{-0,5x+1}$ و (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$.

ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب $a(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x ; y)$ حيث $0 \le x \le \lambda$ و $f(x) \le y \le 0$

ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$

<u>الحل</u> : $f(x) = -e^{-0,5x+1}$ إذن : $f(x) < 0$ من أجل كل x من IR

منه : $a(\lambda) = \int_0^\lambda - f(x)\,dx \times ||\vec{i}||.||\vec{j}|| = \int_0^\lambda e^{-0,5x+1}\,dx ||\vec{i}||\,||\vec{j}||$ لأن الحيز المطلوب هو جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = \lambda$ منه :

$$a(\lambda) = \left[\left(-\frac{1}{0,5} e^{-0,5x+1}\right)\right]_0^\lambda$$

$$= [-2e^{-0,5x+1}]_0^\lambda$$

$$= -2e^{-0,5\lambda+1} + 2e$$

$$= 2(e - e^{-0,5\lambda+1})||\vec{i}||.||\vec{j}||$$

منه : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = 2e||\vec{i}||.||\vec{j}||$ لأن $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-0,5\lambda+1} = 0$

التكامل بالتجزئة

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' مستمرتان على I . من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I فإن :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

<u>مثال</u> : $\mathbf{A = \int_0^{\pi/3} x \sin x \, dx}$

نضع : $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \text{ إذن : } u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x \text{ إذن : } v(x) = -\cos x \end{array}\right\}$

منه : $A = \int_0^{\pi/3} u(x)\,.\,v'(x)\,dx$

إذن : حسب التكامل بالتجزئة فإن : $A = [u(x)\,v(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} u'(x)\,v(x)\,dx$

أي : $A = [-x\cos x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos x\,dx$

أي : $A = [-x\cos x]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx$

أي : $A = [-x\cos x]_0^{\pi/3} + [\sin x]_0^{\pi/3}$

أي :
$$A = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi/3}$$

منه :
$$A = \left[-\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[0 + \sin 0\right]$$

أي :
$$A = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أخيرا :
$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

الدالة الأصلية التي تنعدم من أجل قيمة معينة :

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل العدد a هي الدالة F المعرفة كمايلي : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

مثال : تعيين الدالة الأصلية F للدالة $x \longmapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1 .

الحل :
$$F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$$
$$= [t\ln t - t]_1^x$$
$$= [x\ln x - x] - [\ln 1 - 1]$$
$$= x\ln x - x + 1$$

توظيف التكامل في حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد (O, I, J, K) محاوره (xx') ؛ (yy') ؛ (zz')

نعتبر وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على (O, I, J, K)

ليكن في الفضاء مجسم محدد بمستويين موازيين للمستوي (xoy) معادلاتهما $z = a$ و $z = b$ حيث $a < b$

خاصية (1)

نضع $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو موازي للمستوي (xoy) راقمه z حيث $a < z < b$

حجم المجسم بوحدة الحجوم (uv) هي $V = \int_a^b S(z)\,dz$

مثال : برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

الحل : نعتبر كرة في الفضاء مركزها هو المبدأ 0 و نصف قطرها R

إذن : مقطع الكرة بمستوى موازي للمستوي (xoy) راقمه z حيث $-R < z < R$ هو دائرة مركزها $w(0 ; 0 ; z)$ و

نصف قطرها r حيث $R^2 = z^2 + r^2$ أي $r^2 = R^2 - z^2$

إذن : مساحة هذه الدائرة هي : $S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$

إذن : حسب الخاصية (1) فإن حجم الكرة بوحدة الحجوم هي :

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = \int_{-R}^{R} \pi R^2\,dz - \int_{-R}^{R} \pi z^2\,dz$$
$$= \left[\pi R^2 z - \frac{1}{3}\pi z^3\right]_{-R}^{R}$$
$$= \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}$$
$$= \pi\left[R^2 R - \frac{1}{3}R^3 - \left(-R^2 R - \frac{1}{3}(-R)^3\right)\right]$$
$$= \pi\left[2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right]$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3 (u.v)$$ و هو المطلوب .

المسافة المقطوعة على مستقيم

نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة التي تقطعها نقطة مادية عند أي لحظة t .

السرعة اللحظية لهذه النقطة عند اللحظة t نرمز لها بـ $V(t)$ معرفة بالعلاقة

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad \text{أي :} \quad dx = V(t)\,dt$$

خاصية : المسافة التي تقطعها نقطة مادية بين لحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ ذات السرعة اللحظية $V(t)$

هي : $x = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt$

نشاط : سرعة نقطة مادية هي $V(t) = 2t + e^t$ مقدر بوحدة m/s (متر في الثانية)

أحسب x المسافة التي تقطعها النقطة المادية بين اللحظتين $t_1 = 1\,s$ و $t_2 = 2\,s$

الحـل : $x = \int_1^2 2t + e^t\,dt = [t^2 + e^t]_1^2 = (4 + e^2) - (1 + e) = 3 + e^2 - e$

إذن : المسافة x هي $3 + e^2 - e$ مقدر بوحدة m (المتر)

خاصية :

(C) منحنى لدالة f مستمرة و موجبة على مجال [a ; b] في معلم متعامد . حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل (x x') هو العدد الحقيقي V حيث $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$ مقدر بوحدة قياس الحجوم

مساحة حيز من المستوي المحدد بمنحنيي دالتين مستمرتين

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال [a ; b] حيث من أجل كل x من [a ; b] $f(x) \geq g(x)$ فإن مساحة الحيز (D) من المستوي المحدد بمنحنيي الدالتين f و g و بالمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$ هي العدد الحقيقي A حيث $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ مقدر بوحدة المساحة .

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـــ 1

أحسب في كل ممايلي مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل على المجال I :

1 ــ $f(x) = 2x - 1$: $I = [1/2 \,;\, 3]$

1 ــ $f(x) = -2x - 3$: $I = [-4 \,;\, -2]$

1 ــ $f(x) = |x - 1|$: $I = [-1 \,;\, 4]$

الحـل ــ 1

في كل الحالات الدالة f مستمرة على المجال I إذن : لحساب المساحة المطلوبة يكفي معرفة إشارة الدالة f على المجال I ثم حساب المساحة S كمايلي :

1 ــ $1/2 \leq x \leq 3$ إذن : $1 \leq 2x \leq 6$ منه : $0 \leq 2x - 1 \leq 5$

منه : من أجل كل x من I : $f(x) \geq 0$

إذن : $S = \int_{1/2}^{3} (2x - 1)\,dx = [x^2 - x]_{1/2}^{3} = (9 - 3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

2 ــ $-4 \leq x \leq -2$ إذن : $4 \leq -2x \leq 8$ منه : $1 \leq -2x - 3 \leq 5$

منه : من أجل كل x من I : $f(x) > 0$ إذن : $S = \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx$

أي : : $S = \int_{-4}^{-2} (-2x - 3)\,dx = [-x^2 - 3x]_{-4}^{-2} = (-4 + 6) - (-16 + 12) = 2 + 4 = 6$

3 ــ من أجل كل x من R فإن $|x - 1| \geq 0$ و خاصة من أجل كل x من I

$$S = \int_{-1}^{4} |x - 1|\,dx = \int_{-1}^{1} |x - 1|\,dx + \int_{1}^{4} |x - 1|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - x)\,dx + \int_{1}^{4} (x - 1)\,dx \quad \text{لأن} \quad |x - 1| = \begin{cases} 1 - x : x \leq 1 \\ x - 1 : x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{4}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\right) + (8 - 4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

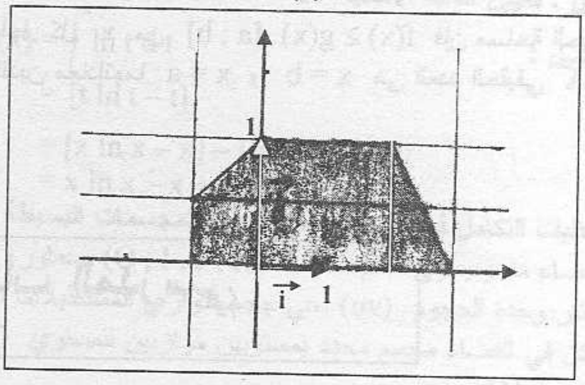
ملاحظة : المساحة S مقدرة بوحدة قياس أشعة توجيه المعلم

<u>التمرين ـ 2</u>

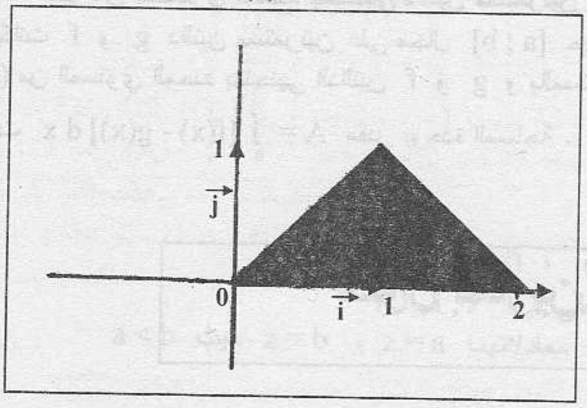
إليك في كل حالة مماثلي المنحنى (C) لدالة f على مجال I

أحسب تكامل الدالة f على المجال I

الحالة (1)



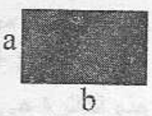
الحالة (2)

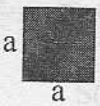


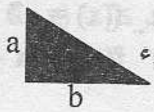
<u>الحـل ـ 2</u>

في كلا الحالتين المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل إذن : مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات $x = a$ و $x = b$ حيث $I = [a ; b]$ (مجال تعريف الدالة f) هي : $S = \int_a^b f(x)\,dx$ مقدرة بوحدة قياس المساحة إذن يكفي أن نحسب مساحة الجزء الملون في كل شكل كما يلي :

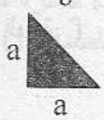
الحالة (1) حسب مقياس الرسم فإن :

مساحة الجزء 

تساوي 1 إذن مساحة الجزء 

تساوي 1/2 و مساحة الجزء 

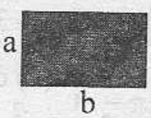
تساوي 1/2

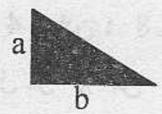
و مساحة الجزء 

تساوي 1/4

و عليه : $S = 2(1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ مقدرة بوحدة قياس المساحة

إذن : $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \frac{13}{4}$

الحالة (2) حسب مقياس الرسم فإن : مساحة الجزء 

تساوي 1 و مساحة الجزء 

تساوي 1/2

إذن : $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ مقدرة بوحدة قياس المساحة

و عليه : $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ملاحظة : مقياس الرسومات هي : $a = \|\vec{i}\|$ و $b = \|\vec{j}\|$ حسب المنحنى .

<u>التمرين ـ 3</u>

f دالة معرفة على $[-1 ; 1]$ بـ $f(x) = \begin{cases} -2x : x \in [-1 ; 0] \\ x^2 \quad : x \in [0 ; 1] \end{cases}$ و (C) منحناها في معلم متعامد

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ ؛ $x = 1$

الحــل ــ 3

لتكن S المساحة المطلوبة . لأن f مسمرة على المجال $[-1 ; 1]$

على المجال $[-1 ; 0]$ لدينا : $-1 \le x \le 0$ إذن : $0 \le -2x \le 2$ أي $f(x) \ge 0$

على المجال $[0 ; 1]$ لدينا : $x^2 \ge 0$ إذن : $f(x) \ge 0$

منه : $S = \int_{-1}^{0} -2x\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx = \left[-x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = \left[0-(-1)\right] + \left[\frac{1}{3} - 0\right] = \frac{4}{3}$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على $[-3 ; 3]$ بـ $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 1{,}5 : & -3 \le x \le -1 \\ x+2 : & -1 < x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + 2 : & 0 \le x \le 3 \end{cases}$ و (C) منحناها في معلم متعامد

1 ــ تحقق أن f مستمرة على $[-3 ; 3]$

2 ــ أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -3$ و $x = 3$

الحــل ــ 4

1 ــ f مستمرة على $[-3 ; -1[\cup]-1 ; 0[\cup [0 ; 3]$ إذن يكفي أن نثبت أنها مستمرة عند (-1) على اليمين ثم عند 0 على اليسار حتى تكون f مستمرة على $[-3 ; 3]$ كمايلي :

$f(-1) = 0{,}5(-1) + 1{,}5 = 1$ و لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x + 2 = -1 + 2 = 1$

إذن : f مستمرة على يمين (-1)

$f(0) = -\frac{2}{3}(0) + 2 = 2$ و لدينا : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} x + 2 = 2$

إذن : f مستمرة عند 0 على اليسار .

نتيجة : f مستمرة على $[-3 ; 3]$

2 ــ $-3 \le x \le -1$ إذن : $-1{,}5 \le 0{,}5x \le -0{,}5$ أي $0 \le 0{,}5x + 1{,}5 \le 1$ أي $f(x) \ge 0$ على المجال $[-3 ; -1]$

$-1 < x < 0$ إذن : $1 < x + 2 < 2$ إذن : $f(x) > 0$ على المجال $[-1 ; 0]$

$0 \le x \le 3$ إذن : $-2 \le -\frac{2}{3}x \le 0$ إذن : $0 \le -\frac{2}{3}x + 2 \le 2$ أي $f(x) \ge 0$ على المجال $[0 ; 3]$

نتيجة : من أجل كل x من $[-3 ; 3]$: $f(x) \ge 0$

إذن : المساحة المطلوبة S هي : $S = \int_{-3}^{-1} (0{,}5x + 1{,}5)\,dx + \int_{-1}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{3} \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) dx$

$$= \left[\frac{0{,}5}{2}x^2 + 1{,}5x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{0{,}5}{2} - 1{,}5 - \left(\frac{0{,}5(9)}{2} - 3(1{,}5)\right) + 0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) + \left(-\frac{9}{3} + 6\right) - 0$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 3$$

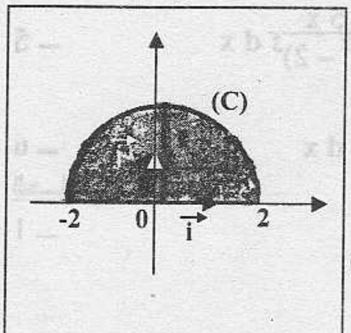
$$= \frac{11}{2}$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة

التمرين ــ 5

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f في معلم متعامد و متجانس . حيث (C) هو نصف الدائرة التي مركزها $O(0 ; 0)$ و نصف قطرها 2 .

أحسب $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ حيث $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



الحــل ــ 5

مساحة الجزء الملون من المستوي هي $S = \frac{1}{2}\pi(2)^2$ أي $S = 2\pi$ (نصف مساحة الدائرة)

لكن الجزء الملون هو حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيماتالتي معادلاتها $x = -2$ و $x = 2$

إذن : $S = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

لنثبت أن المنحنى (C) له المعادلة $y = \sqrt{4 - x^2}$

معادلة الدائرة ذات المركز 0 و نصف القطر 2 هي $x^2 + y^2 = 4$

إذن : $y^2 = 4 - x^2$

لكن جزء الدائرة الملون يقع فوق محور الفواصل إذن : $y \geq 0$ منه : $y = \sqrt{4 - x^2}$

إذن : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

منه : $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\pi$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 6

أحسب التكاملات التالية :

1 ــ $\int_{0}^{1} 3x + 1\,dx$

2 ــ $\int_{1}^{3} -x + 3\,dx$

3 ــ $\int_{-5}^{-2} 4x + 3\,dx$

4 ــ $\int_{0}^{2} x^2 - x\,dx$

5 ــ $\int_{1}^{2} (x+1)^3\,dx$

الحـل ــ 6

1 ــ $$\int_{0}^{1} 3x + 1\,dx = \left[3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + x\right]_{0}^{1} = \frac{3}{2} + 1 - 0 = \frac{5}{2}$$

2 ــ $$\int_{1}^{3} -x + 3\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{3} = -\frac{9}{2} + 9 - \left(-\frac{1}{2} + 3\right) = \frac{-9}{2} + 9 + \frac{1}{2} - 3 = 2$$

3 ــ $$\int_{-5}^{-2} 4x + 3\,dx = [2x^2 + 3x]_{-5}^{-2} = 8 - 6 - (50 - 15) = 2 - 35 = -33$$

4 ــ $$\int_{0}^{2} x^2 - x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 0 = \frac{2}{3}$$

5 ــ $$\int_{1}^{2} (x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{1}^{2} = \frac{1}{4}(3)^4 - \frac{1}{4}(2)^4 = \frac{1}{4}(81 - 16) = \frac{65}{4}$$

التمرين ــ 7

أحسب التكاملات التالية :

1 ــ $\int_{1/2}^{2} 2t - 1 + \frac{1}{t^2}\,dt$

2 ــ $\int_{1}^{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

3 ــ $\int_{1}^{2} 2x(x^2 - 1)\,dx$

4 ــ $\int_{1}^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

5 ــ $\int_{2}^{3} \frac{5x}{(x^2 - 2)^3}\,dx$

6 ــ $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$

7 ــ $\int_{0}^{3} \frac{dt}{\sqrt{t+1}}$

8 ــ $\int_{1}^{2} \frac{t^3}{t^4 + 1}\,dt$

9 ــ $\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx$

10 ــ $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4 - x}}\,dx$

11 ــ $\int_{0}^{3} \frac{dt}{(2t + 1)^2}$

الحـل ــ 7

1 ــ $$\int_{1/2}^{2} 2t - 1 + \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{1/2}^{2} 2t - 1 + t^{-2}\,dt$$
$$= \left[t^2 - t - \frac{1}{t}\right]_{1/2}^{2}$$

$$= \left(4 - 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{15}{4}$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = [\ln|x| - \sqrt{x}]_1^4$$ – 2

$$= (\ln 4 - 2) - (\ln 1 - 1)$$

$$= \ln 4 - 1$$

$$\int_1^2 2x(x^2-1)\, dx = \left[\frac{1}{2}(x^2-1)^2\right]_1^2 = \frac{9}{2}$$ – 3

$$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\int_1^{10} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = 2[\sqrt{t}]_1^{10} = 2(\sqrt{10} - 1)$$ – 4

$$\int_2^3 \frac{5x}{(x^2-2)^3}\, dx = \frac{5}{2}\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-2)^3}\, dx$$ – 5

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{1}{-3+1}(x^2-2)^{-3+1}\right]_2^3$$

$$= \frac{-5}{4}\left[\frac{1}{(x^2-2)^2}\right]_2^3$$

$$= \frac{-5}{4}\left(\frac{1}{49} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\, dx = [e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = 3 - 2 = 1$$ – 6

$$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t+1}} = 2\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\, dt = 2\left[\sqrt{t+1}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$ – 7

$$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1}\, dt = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4t^3}{t^4+1}\, dt$$ – 8

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|t^4+1|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 17 - \ln 2)$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx$$ – 9

$$= \frac{1}{2}[\ln|e^{2x}+1|]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(e^2+1) - \ln 2)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -2\int_0^3 \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}\, dx$$ – 10

$$= -2\left[\sqrt{4-x}\right]_0^3$$

$$= -2(1-2)$$

$$= 2$$

11 – $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2\,dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2t+1}\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{7}+1\right) = \frac{3}{7}$

التمرين – 8

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx$ 6 – $\int_0^{\pi} \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$

2 – $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$ 7 – $\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2-9}\,dx$

3 – $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ 8 – $\int_0^1 3e^{4x}\,dx$

4 – $\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x}\,dx$ 9 – $\int_0^1 t\,e^{t^2-1}\,dt$

5 – $\int_1^2 \frac{1}{2x+3}\,dx$ 10 – $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x\cos x\,dx$

الحل – 8

1 – $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2 – $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

3 – $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \left[\sqrt{2x+1}\right]_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

4 – $\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x}\,dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{2}{x}\,dx$

$= [x - 2\ln|x|]_{-2}^{-1}$

$= (-1 - 2\ln 1) - (-2 - 2\ln 2)$

$= 1 + 2\ln 2$

5 – $\int_1^2 \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|2x+3|]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5)$

6 – $\int_0^{\pi} \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt = \left[-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}$

7 – $\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2-9}\,dx$

$= \frac{1}{2}[\ln|x^2-9|]_{-2}^{2}$

$= \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 5)$

$= 0$

8 – $\int_0^1 3\,e^{4x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^1 4\,e^{4x}\,dx = \frac{3}{4}\,[e^{4x}]_0^1 = \frac{3}{4}(e^4 - 1)$

9 – $\int_0^1 t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2\,t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\,[e^{t^2-1}]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

10 – $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} 2\cos x \sin x\,dx$

$= \frac{1}{2}\,[\sin^2 x]_{-\pi/4}^{\pi/3}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= 1/8$

التمرين – 9

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$

2 – $\int_0^1 3\,t\,e^{t^2-1}\,dt$

3 – $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

4 – $\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

5 – $\int_0^3 2^{3x}\,dx$

6 – $\int_0^1 (3t^2+1)\,e^{2t^3+2t}\,dt$

7 – $\int_0^1 \frac{3x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx$

8 – $\int_0^1 (3x-6)(x^2-4x+1)^3\,dx$

الحل – 9

1 – $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx = [\ln|x^2+x-1|]_1^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

2 – $\int_0^1 3\,t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^1 2\,t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{3}{2}\,[e^{t^2-1}]_0^1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

3 – $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,(\sin x)^{-2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{-2+1}\,(\sin x)^{-2+1}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$= \left[\frac{-1}{\sin x}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$= \frac{-2}{\sqrt{2}} + 2 = 2 - \sqrt{2}$

4 – $\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int_1^3 \frac{-1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx$

$= -\,[e^{1/x}]_1^3$

$= -\,(e^{1/3} - e)$

$= e - \sqrt[3]{e}$

$$\int_0^3 2^{3x}\,dx=\int_0^3 8^x\,dx=\int_0^3 e^{x\ln 8}\,dx=\left[\frac{1}{\ln 8}e^{x\ln 8}\right]_0^3=\frac{1}{\ln 8}(e^{3\ln 8}-1)=\frac{8^3-1}{\ln 8}$$ — 5

$$\int_0^1 (3t^2+1)\,e^{2t^3+2t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 (6t^2+2)\,e^{2t^3+2t}\,dt$$ — 6

$$=\frac{1}{2}\left[e^{2t^3+2t}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^4-1)$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx=\frac{3}{2}\left[\ln|x^2+\sqrt{2}|\right]_0^1=\frac{3}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2})-\ln\sqrt{2}\right)$$ — 7

$$\int_0^1 (3x-6)(x^2-4x+1)^3\,dx=3\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^3\,dx$$ — 8

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 (2x-4)(x^2-4x+1)^3\,dx$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}(x^2-4x+1)^4\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{8}\left[(x^2-4x+1)^4\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{8}(16-1)$$

$$=45/8$$

التمرين — 10

1 — أوجد الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من {3 ; 3 -} - IR :

$$\frac{3}{x^2-9}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}$$

2 — إستنتج $\int_{-1}^{2}\frac{3}{x^2-9}\,dx$

الحل — 10

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}=\frac{ax+3a+bx-3b}{(x-3)(x+3)}=\frac{(a+b)x+3(a-b)}{x^2-9}$$ — 1

بالمطابقة مع $\frac{3}{x^2-9}$ نحصل على $\left.\begin{matrix}a+b=0\\3(a-b)=3\end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix}2a=1\\b=-a\end{matrix}\right\}$ أي : $\left.\begin{matrix}a=1/2\\b=-1/2\end{matrix}\right\}$

منه :
$$\frac{3}{x^2-9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{3}{x^2-9}\,dx=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)dx$$ — 2

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-3|\right]_{-1}^{2}-\frac{1}{2}\left[\ln|x+3|\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 4)-\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2)$$

$$=\frac{-1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2$$

التمرين — 11

1 — عين الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c حيث من أجل كل x من {2 ; 1/2} - IR :

$$\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}=a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x-2}$$

2 — إستنتج $\int_{3}^{4}\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}\,dx$

الحـل – 11

1 –
$$a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x-2}=\frac{a(2x-1)(x-2)+b(x-2)+c(2x-1)}{(2x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{2ax^2-5ax+2a+bx-2b+2cx-c}{2x^2-5x+2}$$
$$=\frac{2ax^2+(-5a+b+2c)x+2a-2b-c}{2x^2-5x+2}$$

بالمطابقة مع $\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$ نحصل على $\left\{\begin{array}{l}2a=4\\ -5a+b+2c=-5\\ 2a-2b-c=0\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ b+2c=5\\ -2b-c=-4\end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ 2b+4c=10\\ -2b-c=-4\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ c=2\\ b=1\end{array}\right.$

منه : $\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}=2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}$

تحقيق : $2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{4x^2-10x+4+x-2+4x-2}{2x^2-5x+2}=\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$

2 –
$$\int_3^4\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}\,dx=\int_3^4 2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}\,dx$$
$$=\left[2x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+2\ln|x-2|\right]_3^4$$
$$=\left(8+\frac{1}{2}\ln 7+2\ln 2\right)-\left(6+\frac{1}{2}\ln 5+2\ln 1\right)$$
$$=2+\frac{1}{2}\ln 7+2\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$$

التمرين – 12

1 – أوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث من أجل $x\neq 1$: $\frac{x^2+2x-3}{x-1}=ax+b+\frac{c}{x-1}$

2 – إستنتج $\int_2^3\frac{x^2+2x-3}{x-1}\,dx$

الحـل – 12

1 – بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x-3 & x-1\\ \hline \underline{x^2-x} & x+3\\ \quad 3x-3 & \\ \quad \underline{3x-3} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

منه : من أجل $x\neq 1$: $\frac{x^2+2x-3}{x-1}=x+3$

إذن : $a=1$ ، $b=3$ ، $c=0$

2 –
$$\int_2^3\frac{x^2+2x-3}{x-1}\,dx=\int_2^3 x+3\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^3$$
$$=\frac{9}{2}+9-(2+6)=11/2$$

التمرين ـــ 13

1 ـــ بين أن من أجل كل x من IR : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

2 ـــ إستنتج $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

الحـل ـــ 13

ـــ 1

$$1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$$

ـــ 2

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$= [x - \ln|1+e^x|]_0^1$$

$$= 1 - \ln(1+e) - (0 - \ln 2)$$

$$= 1 - \ln(1+e) + \ln 2$$

التمرين ـــ 14

f دالة معرفة على المجال [1 ; 1 -] بـــ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1 ـــ تحقق أن المنحنى (C) الممثل للدالة f هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 1 و الواقع فوق محور الفواصل

2 ـــ إستنتج أن $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi/2$

الحـل ـــ 14

1 ـــ المعادلة ذات المركز O و نصف القطر 1 معادلتها : $x^2 + y^2 = 1$ أي $y^2 = 1 - x^2$

إذن : الجزء الواقع فوق محور الفواصل معادلته $y = \sqrt{1-x^2}$ لأن $y \geq 0$

إذن : $y = f(x)$ و هو المطلوب .

2 ـــ لدينا مساحة نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 هي $\frac{1}{2}(\pi \times 1^2) = \pi/2$

إذن : $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi/2$ لأن عبارة مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها 1 - = x و x = 1 هي $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ و يمثل نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 .

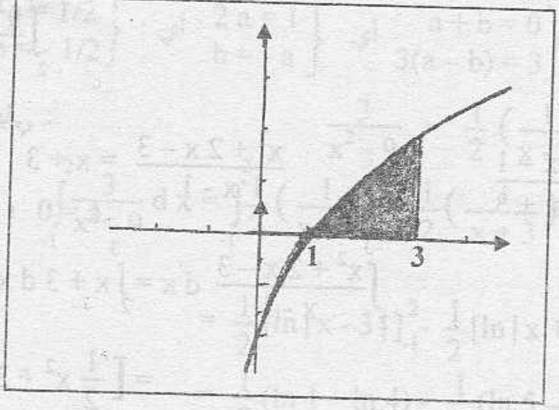
التمرين ـــ 15

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ **بـــ** $f(x) = x - \frac{4}{(x+1)^2}$ **و (C) تمثيلها البياني كما في الشكل (أنظر الشكل) .**

1 ـــ أحسب $\int_1^3 f(x)\,dx$ **ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .**

2 ـــ أحسب $\int_0^3 f(x)\,dx$

الشكل :



الحـل ـــ 15

ـــ 1

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 x - \frac{4}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_1^3 x - 4(x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4\left(\frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1}\right)\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x+1}\right]_1^3$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{4}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right)$$
$$= 3$$

التفسير الهندسي : حسب الشكل فإن منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل على المجال $[1 ; 3]$

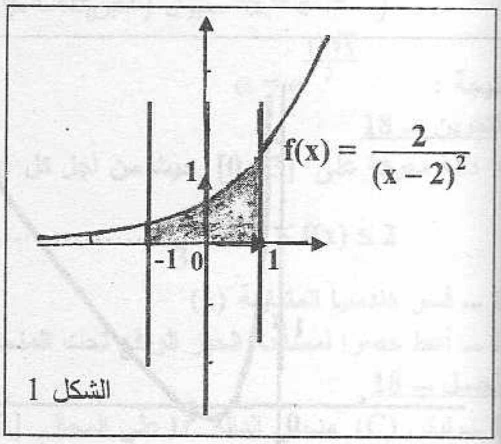
إذن العدد $\int_1^3 f(x)\,d\,x$ يعبر عن مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = 3$ أي الجزء الملون في الشكل . و عليه فإن مساحة هذا الجزء هي 3 (وحدة قياس المساحة) .

2 ــ $\int_0^3 f(x)\,d\,x = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x+1}\right]_0^3 = \frac{9}{2} + \frac{4}{4} - (0+4) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$

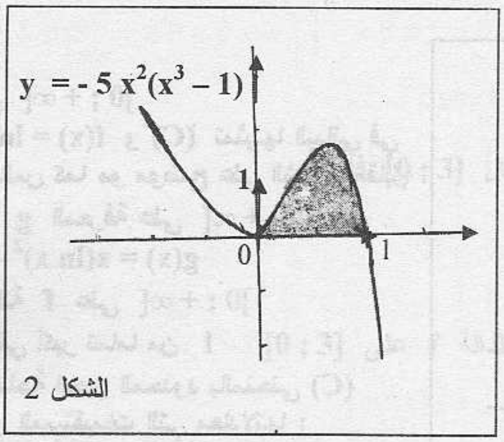
التمرين ــ 16

إليك الأشكال التالية لمنحنيات .

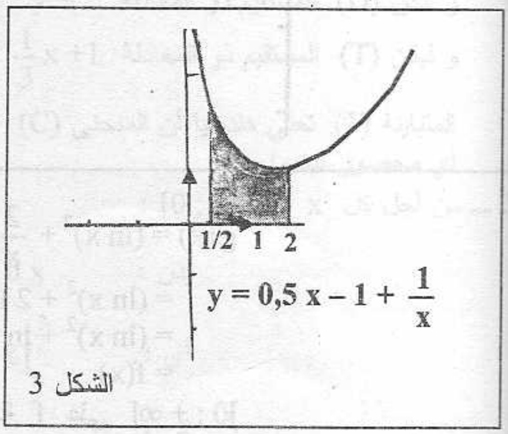
المطلوب : أحسب مساحة الحيز الملون مقدرة بوحدة القياس للمساحة .



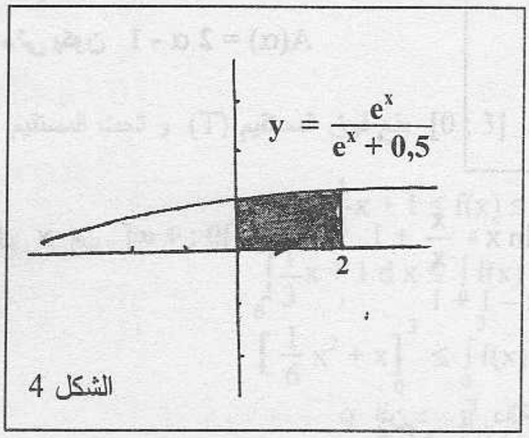
الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3



الشكل 4

الحل ــ 16

في كل الأشكال الجزء الملون من المنحنى يقع فوق محور الفواصل إذن إذا كانت $y = f(x)$ عبارة المنحنى فإن مساحة كل جزء من هذه الأجزاء مقدرة بوحدة قياس المساحات هي : $\int_a^b f(x)\,d\,x$ حيث a و b هي حدود الأجزاء على محور الفواصل كمايلي :

الشكل (1) :
$$S = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(x-2)^2}\,d\,x = 2\left[\frac{-1}{x-2}\right]_{-1}^{1} = 2\left[\frac{-1}{-1} - \left(\frac{-1}{-3}\right)\right] = \frac{4}{3}$$

الشكل (2) :
$$S = \int_0^1 -5x^2(x^3-1)\,d\,x = -\frac{5}{3}\int_0^1 3x^2(x^3-1)\,d\,x$$
$$= -\frac{5}{3}\left[\frac{1}{2}(x^3-1)^2\right]_0^1$$
$$= -\frac{5}{6}\left[(x^3-1)^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{6}\left[0-(1)\right] = \frac{5}{6}$$

الشكل (3) : $S = \int_{1/2}^{2} 0{,}5\,x - 1 + \frac{1}{x}\,dx$

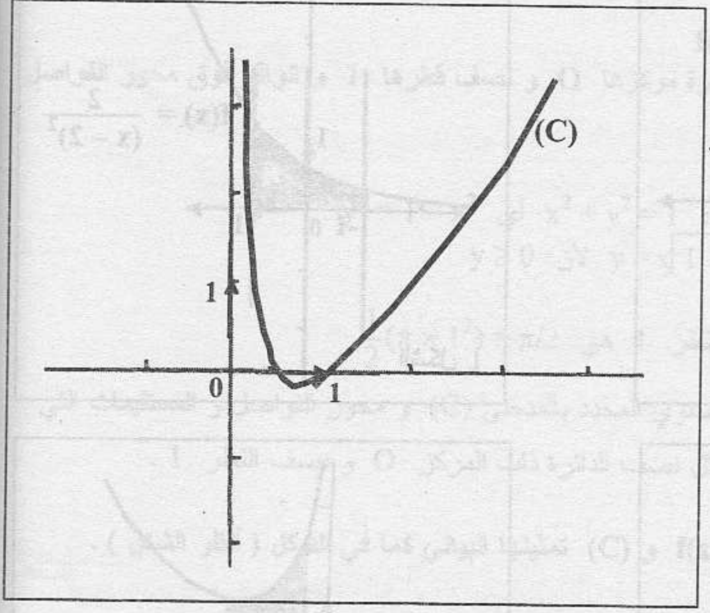
$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - x + \ln|x|\right]_{1/2}^{2}$$

$$= (1 - 2 + \ln 2) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2} - \ln 2\right)$$

$$= -1 + \ln 2 + \frac{7}{16} + \ln 2$$

$$= 2\ln 2 - \frac{9}{16}$$

الشكل (4) : $S = \int_{0}^{2} \frac{e^x}{e^x + 0{,}5}\,dx = [\ln|e^x + 0{,}5|]_0^2 = \ln(e^2 + 0{,}5) - \ln(1{,}5)$



التمرين ـ 17

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$

بـ $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس كما مو موضح على الشكل المقابل .

1 ـ بين أن الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$

بـ $g(x) = x(\ln x)^2 - x\ln x + x$

هي دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$

2 ـ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها :

$x = \alpha$ و $x = 1$

3 ـ عين α حتى يكون $A(\alpha) = 2\alpha - 1$

الحل ـ 17

1 ـ من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$: $g'(x) = (\ln x)^2 + \frac{2}{x}\,x\ln x - \ln x - \frac{x}{x} + 1$

$$= (\ln x)^2 + 2\ln x - \ln x - 1 + 1$$
$$= (\ln x)^2 + \ln x$$
$$= f(x)$$

إذن : g دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$

2 ـ على المجال $[1\,;\alpha]$ منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل إذن مساحة الحيز المحدود بـ (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = \alpha$ هي :

$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx = [g(x)]_1^{\alpha}$ مقدرة بوحدة قياس المساحة

منه : $A(\alpha) = g(\alpha) - g(1)$

أي : $A(\alpha) = \alpha(\ln\alpha)^2 - \alpha\ln\alpha + \alpha - 1$ و هو المطلوب .

3 ـ

$$A(\alpha) = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha(\ln\alpha)^2 - \alpha\ln\alpha + \alpha - 1 = 2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha(\ln\alpha)^2 - \alpha\ln\alpha - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ (\ln\alpha)^2 - \ln\alpha - 1 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (1) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) ذات المجهول α حيث $\alpha > 1$

نضع : $t = \ln \alpha$ إذن : $t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

إذن : $\ln \alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ أو $\ln \alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

أي : $\alpha = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ مرفوض (أصغر من 1) أو $\alpha = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ مقبول (أكبر تماما من 1)

نتيجة : $\alpha = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

التمرين ـ 18

f دالة معرفة على $[0 ; 3]$ حيث من أجل كل x من المجال $[0 ; 3]$ فإن :

$$\frac{1}{3}x + 1 \le f(x) \le 2 \quad \text{.............. (1)}$$

1 ـ فسر هندسيا المتباينة (1)

2 ـ أعط حصرا لمساحة الحيز الواقع تحت المنحنى الممثل للدالة f على $[0 ; 3]$

الحـل ـ 18

1 ـ ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال $[0 ; 3]$

و ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = 2$

و ليكن (T) المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{3}x + 1$

المتباينة (1) تعني هندسيا أن المنحنى (C) على المجال $[0 ; 3]$ يقع فوق المستقيم (T) و تحت المستقيم (D) أي محصور بينهما

2 ـ من أجل كل x من $[0 ; 3]$: $\frac{1}{3}x + 1 \le f(x) \le 2$

إذن : $\int_0^3 \frac{1}{3}x + 1\, dx \le \int_0^3 f(x)\, dx \le \int_0^3 2\, dx$

أي : $\left[\frac{1}{6}x^2 + x\right]_0^3 \le \int_0^3 f(x)\, dx \le \left[2x\right]_0^3$

أي : $\frac{9}{6} + 3 \le \int_0^3 f(x)\, dx \le 6$

أي : $\frac{9}{2} \le \int_0^3 f(x)\, dx \le 6$

نتيجة : مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C) مقدرة بوحدة المساحة هي $S = \int_0^3 f(x)\, dx$

إذن : $9/2 \le S \le 6$

التمرين ـ 19

باستعمال الخواص أحسب التكاملات التالية :

1 ـ $\int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e x + \ln(1/x)\, dx$

2 ـ $\int_1^e \ln(x^2 + 1)\, dx + \int_e^1 \ln(x^2 + 1)\, dx$

3 ـ $\int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx - \int_1^{7\pi/6} \cos 2x\, dx$

الحل ـ 19

1 ـ $\int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e x + \ln(1/x)\, dx = \int_1^e \ln x + x + \ln(1/x)\, dx$

$= \int_1^e \ln x + x - \ln x\, dx$

$= \int_1^e x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2}$

2 ـ $\int_1^e \ln(x^2+1)\, dx + \int_e^1 \ln(x^2+1)\, dx = \int_1^1 \ln(x^2+1)\, dx = 0$

3 ـ $\int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx - \int_1^{7\pi/6} \cos 2x\, dx = \int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx - \left[\int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx + \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \cos 2x\, dx\right]$

$= -\int_{\pi/6}^{7\pi/6} \cos 2x\, dx$

$= -\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/6}^{7\pi/6}$

$= -\left[\frac{1}{2}\sin 7\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= -\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 0$

التمرين ـ 20

f و g دالتان مستمرتان على المجال [5 ; 10] حيث $\left\{\begin{array}{l}\int_5^{10} f(x)\, dx = 4\\ \int_5^{10} g(x)\, dx = -5\end{array}\right.$

أحسب التكاملات التالية :

1 ـ $\int_5^{10} (f+g)(x)\, dx$

2 ـ $\int_5^{10} \frac{5}{2} f(x)\, dx$

3 ـ $\int_5^{10} (f-g)(x)\, dx$

4 ـ $\int_5^{10} (2f+3g)(x)\, dx$

5 ـ $\int_5^{10} \left(-f + \frac{2}{3}g\right)(x)\, dx$

6 ـ $\int_5^{10} (2f-g)(x)\, dx$

الحل ـ 20

1 ـ $\int_5^{10} (f+g)(x)\, dx = \int_5^{10} f(x)\, dx + \int_5^{10} g(x)\, dx = 4 - 5 = -1$

2 ـ $\int_5^{10} \frac{5}{2} f(x)\, dx = \frac{5}{2}\int_5^{10} f(x)\, dx = \frac{5}{2}(4) = 10$

3 ـ $\int_5^{10} (f-g)(x)\, dx = \int_5^{10} f(x)\, dx - \int_5^{10} g(x)\, dx = 4 - (-5) = 9$

4 ـ $\int_5^{10} (2f+3g)(x)\, dx = 2\int_5^{10} f(x)\, dx + 3\int_5^{10} g(x)\, dx = 2(4) + 3(-5) = -7$

5 ـ $\int_5^{10} \left(-f + \frac{2}{3}g\right)(x)\, dx = -\int_5^{10} f(x)\, dx + \frac{2}{3}\int_5^{10} g(x)\, dx = -4 + \frac{2}{3}(-5) = \frac{-22}{3}$

6 ـ $\int_5^{10} (2f-g)(x)\, dx = 2\int_5^{10} f(x)\, dx - \int_5^{10} g(x)\, dx = 2(4) - (-5) = 13$

التمرين ـــ 21

أحسب التكامل I حيث $I=\int_{-1}^{1}|x|+|x+1|\,dx$

الحـل ـــ 21

$$|x|=\begin{cases}x : x\geq 0\\ -x : x\leq 0\end{cases} \qquad |x+1|=\begin{cases}x+1 : x\geq -1\\ -x-1 : x\leq -1\end{cases}$$

إذن :

$$\int_{-1}^{1}|x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^{0}|x|+|x+1|\,dx+\int_{0}^{1}|x|+|x+1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}-x+x+1\,dx+\int_{0}^{1}x+x+1\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}1\,dx+\int_{0}^{1}2x+1\,dx$$
$$=[x]_{-1}^{0}+[x^2+x]_{0}^{1}$$
$$=0-(-1)+1+1-0$$
$$=3$$

نتيجة : $I=3$

التمرين ـــ 22

أحسب $\int_{\pi/3}^{3\pi/2}|\sin t|\,dt$

الحـل ـــ 22

$$|\sin t|=\begin{cases}\sin t : 0\leq t\leq \pi\\ -\sin t : \pi\leq t\leq 3\pi/2\end{cases}$$

إذن :

$$\int_{\pi/3}^{3\pi/2}|\sin t|\,dt=\int_{\pi/3}^{\pi}|\sin t|\,dt+\int_{\pi}^{3\pi/2}|\sin t|\,dt$$
$$=\int_{\pi/3}^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{3\pi/2}-\sin t\,dt$$
$$=[-\cos t]_{\pi/3}^{\pi}+[\cos t]_{\pi}^{3\pi/2}$$
$$=-(-1)+\frac{1}{2}+0-(-1)$$
$$=5/2$$

التمرين ـــ 23

f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $f(x)=\begin{cases}x : 0\leq x\leq 1\\ 1/x : x>1\end{cases}$

أحسب التكاملات التالية :

1 ـ $I=\int_{0}^{3}f(x)\,dx$ 2 ـ $J=\int_{2}^{1/2}f(x)\,dx$

الحـل ـــ 23

ـ 1

$$I=\int_{0}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{3}\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\ln x\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{1}{2}-0+\ln 3-\ln 1$$
$$=\frac{1}{2}+\ln 3$$

2 –
$$J = \int_2^{1/2} f(x)\,dx$$
$$= \int_2^1 f(x)\,dx + \int_1^{1/2} f(x)\,dx$$
$$= \int_2^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{1/2} x\,dx$$
$$= \left[\ln x\right]_2^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{1/2}$$
$$= \ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}$$
$$= -\ln 2 - \frac{3}{8}$$

التمرين – 24

قارن دون حساب بين التكاملين I و J في الحالات التالية :

1 – $I = \int_0^1 t\,e^t\,dt$ و $J = \int_0^1 t^2 e^t\,dt$

2 – $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ و $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

3 – $I = \int_1^2 u \sin u\,du$ و $J = \int_1^2 u^2 \sin u\,du$

الحل – 24

1 – لندرس إشارة الفرق $t^2e^t - t\,e^t$ على المجال $[0 ; 1]$ كمايلي :

$t^2e^t - t\,e^t = t\,e^t(t-1)$ إذن : $t^2e^t - t\,e^t \le 0$ لأن $t\,e^t \ge 0$ و $t - 1 \le 0$

أي : $t^2 e^t \le t\,e^t$

منه : $\int_0^1 t^2 e^t\,dt \le \int_0^1 t\,e^t\,dt$

أي : $J \le I$

2 – ندرس إشارة الفرق $\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ على المجال $[0 ; 1]$ كما يلي :

$\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2}$ إذن : $\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ لأن $x - 1 \le 0$

منه : $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

أي : $J \le I$

3 – ندرس إشارة الفرق $u^2 \sin u - u \sin u$ على المجال $[1 ; 2]$ كمايلي :

$u^2 \sin u - u \sin u = u \sin u(u-1)$ إذن : $u^2 \sin u \ge u \sin u$ لأن $u - 1 \ge 0$

منه : $\int_1^2 u^2 \sin u\,du \ge \int_1^2 u \sin u\,du$

أي : $J \ge I$

التمرين – 25

دون حساب التكاملات التالية عين إشارتها :

1 – $\int_2^3 \sqrt{x-1}\,dx$ **4 –** $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{t-2}\,dt$

2 – $\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x}\,dx$ **5 –** $\int_0^2 -e^{-u+1}\,du$

3 – $\int_0^3 t^2+t+1\,dt$ **6 –** $\int_{-1/2}^{1} \ln(u+1)\,du$

الحل – 25

1 – لتكن $f : x \longmapsto \sqrt{x-1}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f موجبة فإن F متزايدة أي $F(3) > F(2)$ منه : $F(3) - F(2) > 0$

أي : $\int_2^3 \sqrt{x-1}\, dx > 0$

2 – لتكن $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f موجبة فإن F متزايدة إذن : $F(-2) > F(-3)$ منه : $F(-2) - F(-3) > 0$

أي : $\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x}\, dx > 0$

3 – لتكن $f : t \longmapsto t^2 + t + 1$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f موجبة فإن F متزايدة إذن : $F(3) > F(0)$ منه : $F(3) - F(0) > 0$

أي : $\int_0^3 t^2 + t + 1\, dt > 0$

4 – لتكن $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t-2}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f سالبة على المجال $[-4 ; -1]$ لأن $t - 2 < 0$ فإن F متناقصة على المجال $[-4 ; -1]$

أي $F(-1) < F(-4)$ منه $F(-1) - F(-4) < 0$

أي : $\int_{-4}^{-1} \dfrac{1}{t-2}\, dt < 0$

5 – لتكن $f : u \longmapsto -e^{-u+1}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f سالبة على $\mathbb{R}$ فإن الدالة F متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ إذن : $F(2) < F(0)$

أي $F(2) - F(0) < 0$ منه $\int_0^2 -e^{-u+1}\, du < 0$

6 – لتكن $f : u \longmapsto \ln(u+1)$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن $-1/2 \le u \le 1$ فإن $1/2 \le u + 1 \le 2$ إذن : $\ln(u+1)$ يغير إشارته من أجل $u \in [-1/2 ; 1]$ و عليه فإن

الدالة f تغير إشارتها على المجال $[-1/2 ; 1]$

إذن : F ليست رتيبة على المجال $[-1/2 ; 1]$

نتيجة : لا يمكن إستنتاج إشارة التكامل $\int_{-1/2}^{1} \ln(u+1)\, du$ دون حسابه كمايلي :

$$\int_{-1/2}^{1} \ln(u+1)\, du = \left[(u+1)\ln(u+1) - u\right]_{-1/2}^{1}$$

$$= \left(2\ln 2 - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2} > 0$$

التمرين – 26

بين أن من أجل كل x من المجال $[-\pi/4 ; 0]$: $1 \le \dfrac{1}{\cos x} \le \sqrt{2}$ ثم إستنتج أن :

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \le \pi\frac{\sqrt{2}}{4}$$

الحل – 26

$-\dfrac{\pi}{4} \le x \le 0$ إذن : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x \le 1$ حسب الدائرة المثلثية .

منه : $\dfrac{1}{1} \le \dfrac{1}{\cos x} \le \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

أي : $1 \le \dfrac{1}{\cos x} \le \sqrt{2}$ و هو المطلوب .

نتيجة : $\sqrt{2} \geq \frac{1}{\cos x} \geq 1$ على المجال $[-\pi/4 ; 0]$ إذن : حسب خواص التكامل فإن :

$$\int_{-\pi/4}^{0} 1\, dx \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq \int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{2}\, dx$$

أي : $$[x]_{-\pi/4}^{0} \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq [x\sqrt{2}]_{-\pi/4}^{0}$$

أي : $$0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\right)$$

أي : $$\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq \pi \frac{\sqrt{2}}{4}$$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 27

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

1 ــ $f(x) = 2x + 3$ و $I = [-1 ; 1]$

2 ــ $f(x) = |x|$ و $I = [-2 ; 2]$

الحـل ــ 27 :

لتكن m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في كل حالة .

1 ــ $$m = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} 2x + 3\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[x^2 + 3x]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 3 - (1 - 3)]$$

$$= 3$$

2 ــ $$m = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} |x|\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0 - \left(-\frac{4}{2}\right) + \frac{4}{2} - 0\right)$$

$$= 1$$

التمرين ــ 28

بين صحة مايلي :

1 ــ $$\int_{1/2}^{1} \ln x\, dx \geq \frac{-\ln 2}{2}$$

2 ــ $$\int_{1}^{2} \frac{1}{1+x^3}\, dx \leq \frac{1}{2}$$

3 ــ $$-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1)\, dx \leq \frac{\pi}{2}$$

الحـل ــ 28

1 ــ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ إذن : $\ln\frac{1}{2} \leq \ln x \leq \ln 1$ أي $-\ln 2 \leq \ln x \leq 0$

منه : $\int_{1/2}^{1} \ln x\, dx \geq \int_{1/2}^{1} -\ln 2\, dx$ خواص الحصر .

أي : $\int_{1/2}^{1} \ln x \, d x \geq [- x \ln 2]_{1/2}^{1}$

أي : $\int_{1/2}^{1} \ln x \, d x \geq - \ln 2 - \left(- \frac{1}{2} \ln 2\right)$

أي : $\int_{1/2}^{1} \ln x \, d x \geq \frac{- \ln 2}{2}$

2 ـ $1 \leq x \leq 2$ إذن : $1 \leq x^3 \leq 8$ منه : $2 \leq 1 + x^3 \leq 9$

منه : $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{1 + x^3} \leq \frac{1}{2}$

إذن : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1 + x^3} d x \leq \int_{1}^{2} \frac{1}{2} d x$ حسب خواص التكامل

أي : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1 + x^3} d x \leq \left[\frac{1}{2} x \right]_{1}^{2}$

أي : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1 + x^3} d x \leq \frac{2}{2} - \frac{1}{2}$ أي : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1 + x^3} d x \leq \frac{1}{2}$

3 ـ من أجل كل عدد حقيقي x فإن $- 1 \leq \sin(x^2 + 1) \leq 1$

إذن : $\int_{\pi/2}^{\pi} - 1 \, d x \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2 +1) \, d x \leq \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \, d x$

أي : $[- x]_{\pi/2}^{\pi} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2 + 1) \, d x \leq [x]_{\pi/2}^{\pi}$

أي : $- \pi - \left(- \frac{\pi}{2}\right) \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2 + 1) \, d x \leq \pi - \frac{\pi}{2}$

أي : $- \frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2 + 1) \, d x \leq \frac{\pi}{2}$

التمرين ـ 29

1 ـ بين أن من أجل كل x من المجال [0 ; 1] : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x + 1} \leq x^2$

2 ـ إستنتج حصرا للتكامل $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x + 1} d x$

الحـل ـ 29

1 ـ $0 \leq x \leq 1$ إذن : $1 \leq x + 1 \leq 2$

منه : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x + 1} \leq 1$

منه : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x + 1} \leq x^2$ لأن $x^2 \geq 0$

2 ـ بما أن $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x + 1} \leq x^2$ على المجال [0 ; 1] فإن من خواص التكامل :

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{2} d x \leq \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x + 1} d x \leq \int_{0}^{1} x^2 \, d x$$

أي : $\left[\frac{1}{6} x^3 \right]_{0}^{1} \leq \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x + 1} d x \leq \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{0}^{1}$

أي : $\frac{1}{6} \leq \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x + 1} d x \leq \frac{1}{3}$

التمرين ـ 30

أثبت مايلي :

1 ـ $\int_{1}^{4} \cos(x^2) \, d x \leq 3$

2 ـ $\int_0^1 x^2 \cos x \, dx \le \frac{1}{3}$

الحـل ـ 30

1 ـ من أجل كل x من IR : $\cos(x^2) \le 1$

إذن : $\int_1^4 \cos(x^2)\, dx \le \int_1^4 1\, dx$

أي : $\int_1^4 \cos(x^2)\, dx \le [x]_1^4$

أي : $\int_1^4 \cos(x^2)\, dx \le 3$

2 ـ من أجل كل x من IR : $\cos x \le 1$

إذن : $x^2 \cos x \le x^2$ لأن $x^2 \ge 0$

منه : $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \le \int_0^1 x^2\, dx$

أي : $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \le \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

أي : $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \le \frac{1}{3}$

التمرين ـ 31

1 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب t : $1 - t \le \frac{1}{t+1} \le 1$

2 ـ إستنتج أن : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(x+1) \le x$

الحـل ـ 31

1 ـ ليكن $t \ge 0$ إذن : $t + 1 \ge 1$ منه $\frac{1}{t+1} \le 1$ .... (1)

من جهة أخرى : $\frac{1}{t+1} - (1-t) = \frac{1-(1-t^2)}{t+1} = \frac{t^2}{t+1}$

بما أن $t+1 > 0$ و $t^2 \ge 0$ فإن $\frac{t^2}{t+1} \ge 0$ أي : $\frac{1}{t+1} \ge 1 - t$ ...... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن : من أجل $t \ge 0$: $1 - t \le \frac{1}{t+1} \le 1$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن من أجل كل $t \ge 0$ فإن $1 - t \le \frac{1}{t+1} \le 1$

إذن : $\int_0^b 1 - t\, dt \le \int_0^b \frac{1}{t+1}\, dt \le \int_0^b 1\, dt$ حيث $b \ge 0$

أي : $[t - \frac{1}{2}t^2]_0^b \le [\ln|t+1|]_0^b \le [t]_0^b$

أي : $b - \frac{1}{2}b^2 - 0 \le \ln|b+1| - \ln|1| \le b - 0$

أي : $b - \frac{1}{2}b^2 \le \ln(b+1) \le b$....... (3) لأن $b \ge 0$ إذن $b + 1 > 0$

من أجل $b = x$ حيث $x \ge 0$ فإن العلاقة (3) تصبح : $x - \frac{1}{2}x^2 \le \ln(x+1) \le x$

التمرين ـ 32

في كل حالة من الحالات التالية ادرس تغيرات الدالة f على المجال [0 ;1] ثم إستنتج حصرا للتكامل : $\int_0^1 f(x)\, dx$

1 ـ $f(x) = e^x - 1$

2 ـ $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

3 ـ $f(x) = \ln(x+2) - 3$

الحـل ـ 32

1 ـ $f(x) = e^x - 1$

التغيرات على [0 ; 1] : $f(0) = 0$ ؛ $f(1) = e - 1$

$f'(x) = e^x$ إذن : f متزايدة تماما .

جدول التغيرات :

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e - 1$

حسب جدول تغيرات الدالة f على [0 ; 1] فإن : $0 \le f(x) \le e - 1$

إذن : $0 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 e - 1\,dx$ أي : $0 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le [(e-1)\,x]_0^1$

أي : $0 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le e - 1$

2 – $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

التغيرات على [0 ; 1] : $f(0) = -1$ ؛ $f(1) = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ إذن : f متزايدة تماما .

جدول التغيرات :

x	0		1
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/2$

من جدول تغيرات الدالة f على [0 ; 1] فإن : $-1 \le f(x) \le -\frac{1}{2}$

إذن : $\int_0^1 -1\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 -\frac{1}{2}\,dx$ أي $[-x]_0^1 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \left[-\frac{1}{2}x\right]_0^1$

أي : $-1 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le -\frac{1}{2}$

3 – $f(x) = \ln(x+2) - 3$

التغيرات على [0 ; 1] : $f(0) = \ln(2) - 3$ ؛ $f(1) = \ln(3) - 3$

$f'(x) = \frac{1}{x+2} > 0$ إذن : f متزايدة على [0 ; 1]

جدول التغيرات :

x	0		1
$f(x)$	$\ln(2) - 3$	$\nearrow$	$\ln(3) - 3$

حسب جدول تغيرات الدالة f على [0 ; 1] : $\ln(2) - 3 \le f(x) \le \ln(3) - 3$

منه : $\int_0^1 \ln(2) - 3\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \ln(3) - 3\,dx$

أي : $[(\ln 2 - 3)x]_0^1 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le [(\ln(3) - 3)\,x]_0^1$

أي : $\ln(2) - 3 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \ln(3) - 3$

التمرين – 33

بين صحة كل حصر مما يلي :

1 – $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \le 1$

2 – $\frac{9}{4} \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le 9$

3 – $\sqrt{2} \le \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \le 3$

4 – $\frac{2}{e^4} \le \int_0^2 e^{-x^2} dx \le 2$

5 – $2\ln 3 \le \int_2^4 \ln(x^2-1) dx \le 2\ln 3 + 2\ln 5$

الحل – 33

1 – $0 \le x \le 1$ إذن : $0 \le x^3 \le 1$

منه : $1 \le 1+x^3 \le 2$

أي : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^3} \le 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{2} dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \le \int_0^1 1\, dx$

أي : $\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \le [x]_0^1$

أي : $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \le 1$

2 – $0 \le x \le 9$ إذن : $0 \le \sqrt{x} \le 3$

منه : $1 \le 1+\sqrt{x} \le 4$

أي : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{1+\sqrt{x}} \le 1$

منه : $\int_0^9 \frac{1}{4} dx \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le \int_0^9 1\, dx$

أي : $\left[\frac{1}{4}x\right]_0^9 \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le [x]_0^9$

أي : $\frac{9}{4} \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le 9$

3 – $1 \le x \le 2$ إذن : $1 \le x^3 \le 8$

منه : $2 \le 1+x^3 \le 9$

منه : $\sqrt{2} \le \sqrt{1+x^3} \le 3$

منه : $\int_1^2 \sqrt{2}\, dx \le \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \le \int_1^2 3\, dx$

أي : $\left[x\sqrt{2}\right]_1^2 \le \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \le [3x]_1^2$

أي: $\sqrt{2} \le \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \le 3$

4 – $0 \le x \le 2$ إذن : $0 \le x^2 \le 4$

منه : $-4 \le -x^2 \le 0$

منه : $e^{-4} \le e^{-x^2} \le e^0$

أي : $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$

منه : $\int_0^2 \frac{1}{e^4}\, dx \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq \int_0^2 1\, dx$

أي : : $\left[\frac{1}{e^4}x\right]_0^2 \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq [x]_0^2$

أي : $\frac{2}{e^4} \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq 2$

5 ـ $2 \leq x \leq 4$ إذن : $4 \leq x^2 \leq 16$

منه : $3 \leq x^2 - 1 \leq 15$

منه : $\ln 3 \leq \ln(x^2 - 1) \leq \ln 15$

إذن : $\int_2^4 \ln 3\, dx \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, dx \leq \int_2^4 \ln 15\, dx$

أي : $[x \ln 3]_2^4 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, dx \leq [x \ln 15]_2^4$

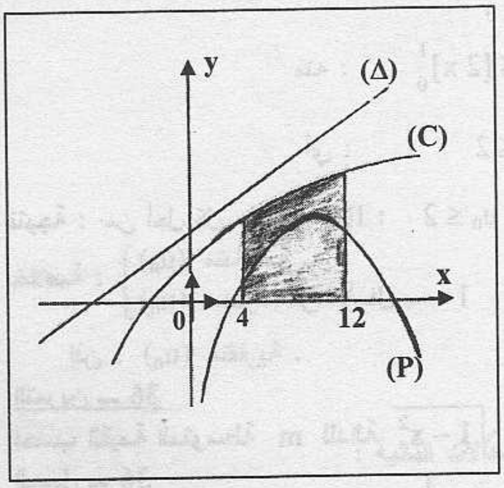
أي : $4 \ln 3 - 2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, dx \leq 4 \ln 15 - 2 \ln 15$

أي : $2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, dx \leq 2 \ln 15$

أي: $2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, dx \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5$

التمرين ـ 34

إليك الشكل التالي :



(C) هو منحنى دالة f مستمرة على $[0 ; +\infty[$

(P) هو القطع المكافئ ذو المعادلة $y = \frac{-1}{10}x^2 + 2x - 5$

(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$

لتكن A مساحة مجموعة النقط $A(x ; y)$

حيث $4 \leq x \leq 12$ و $0 \leq y \leq f(x)$

1 ـ باستعمال الشكل أثبت أن : $\frac{-1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

2 ـ إستنتج حصرا للمساحة A

الحـل ـ 34

1 ـ حسب الشكل لدينا (C) يقع فوق (P) إذن : $f(x) \geq \frac{-1}{10}x^2 + 2x - 5$

و (C) يقع تحت (Δ) إذن : $f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

نتيجة : $\frac{-1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

2 ـ حسب السؤال (1) : $\frac{-1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

إذن : $\int_4^{12} \frac{-1}{10}x^2 + 2x - 5\, dx \leq \int_4^{12} f(x)\, dx \leq \int_4^{12} \frac{1}{2}x + 2\, dx$

أي : $\left[\frac{-1}{30}x^3 + x^2 - 5x\right]_4^{12} \leq \int_4^{12} f(x)\, dx \leq \left[\frac{1}{4}x^2 + 2x\right]_4^{12}$

أي : $\frac{-144 \times 2}{5} + 144 - 60 - \left(\frac{-32}{15} + 16 - 20\right) \leq \int_4^{12} f(x)\, dx \leq 36 + 24 - (4 + 8)$

أي : $32,54 \le \int_4^{12} f(x)\,dx \le 48$

نتيجة : $32,54 \le A \le 48$ لأن $A = \int_4^{12} f(x)\,dx$

التمرين ـــ 35

(u_n) متتالية معرفة على IN بـــ $u_n = \int_0^1 (1 + x^n)\,dx$

1 ـــ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

2 ـــ هل (u_n) متقاربة ؟

الحــل ـــ 35

1 ـــ من أجل كل n من IN :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 1 + x^{n+1}\,dx - \int_0^1 1 + x^n\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1}\,dx - \int_0^1 x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$= \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)}$ سالب لأن $(n+2)(n+1) > 0$

بما أن $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن (u_n) متتالية متناقصة

2 ـــ لدينا : $0 \le x \le 1$ إذن : $0 \le x^n \le 1$

منه : $1 \le 1 + x^n \le 2$

منه : $\int_0^1 1\,dx \le \int_0^1 1 + x^n\,dx \le \int_0^1 2\,dx$

منه : $[x]_0^1 \le \int_0^1 1 + x^n\,dx \le [2x]_0^1$

أي : $1 \le \int_0^1 1 + x^n\,dx \le 2$

نتيجة : من أجل كل n من IN : $1 \le u_n \le 2$

خلاصة : (u_n) متناقصة .
(u_n) محدودة من الأسفل بـــ 1

إذن : (u_n) متقاربة .

التمرين ـــ 36

احسب القيمة المتوسطة m للدالة $f : x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$ على المجال $[-1 ; 1]$

الحــل ـــ 36

$$m = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

لاحظ أن العدد I حيث $I = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ هو نصف مساحة الدائرة ذات المركز $O(0 ; 0)$ و نصف القطر 1 و التي معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ أي $y = \sqrt{1-x^2}$ أي $y = f(x)$

إذن : $I = \frac{1}{2}(\pi)$

منه : $m = \frac{1}{2} I$ أي : $m = \frac{\pi}{4}$

التمرين ـــ 37

في كل حالة من الحالات التالية m هي القيمة المتوسطة لدالة f مستمرة على المجال I . فالمطلوب حساب التكامل المطلوب

1 ـــ $m = 2$ ؛ $I = [1 ; 4]$ أحسب $\int_1^4 f(x)\,dx$

1 ـ $m = \ln 2$ ؛ $I = [1 ; 3]$ أحسب $\int_1^3 f(x)\,dx$

3 ـ $m = 2/\pi$ ؛ $I = [-\pi/4 ; \pi/4]$ أحسب $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$ علما أن f دالة زوجية .

الحـل ـ 37

1 ـ $m = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,dx$ أي : $2 = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx$

منه : $\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{2}{1/3}$

أي : $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$

2 ـ $m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx$ إذن : $\ln 2 = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$

منه : $\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{\ln 2}{1/2}$

أي : $\int_1^3 f(x)\,dx = 2\ln 2$

3 ـ $m = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx$ إذن : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx$

منه : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = \frac{2/\pi}{2/\pi}$

أي : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 1$ ....(1)

لكن $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

و بما أن الدالة f زوجية فإن $\int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

إذن : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

منه : العلاقة (1) تصبح : $2\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = 1$

أي : $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = 1/2$

التمرين ـ 38

عين حصرا للقيمة المتوسطة m للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ، $I = [0 ; 1]$

2 ـ $f(x) = \ln x$ ، $I = [1 ; e]$

3 ـ $f(x) = e^{x^2}$ ، $I = \left[1 ; \sqrt{2}\right]$

الحـل ـ 38

1 ـ $0 \le x \le 1$ إذن : $0 \le x^2 \le 1$

منه : $1 \le x^2 + 1 \le 2$

إذن : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} \le 1$

أي : $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 1\,dx$

أي : $\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq [x]_0^1$

أي: $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$

لكن $m = \int_0^1 f(x)\,dx$ إذن : $1/2 \leq m \leq 1$ و هو المطلوب . (لأن $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx$ = m)

2 ـ $1 \leq x \leq e$ إذن: $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$

أي : $0 \leq f(x) \leq 1$

منه : $0 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq \int_1^e 1\,dx$

منه : $0 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq [x]_1^e$

أي : $0 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq e-1$

منه : $0 \leq \frac{1}{e-1}\int_1^e f(x)\,dx \leq \frac{e-1}{e-1}$

أي : $0 \leq m \leq 1$

3 ـ $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ إذن : $1 \leq x^2 \leq 2$

منه : $e \leq e^{x^2} \leq e^2$

أي : $e \leq f(x) \leq e^2$

منه : $\int_1^{\sqrt{2}} e\,dx \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq \int_1^{\sqrt{2}} e^2\,dx$

أي : $[x\,e]_1^{\sqrt{2}} \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq [x\,e^2]_1^{\sqrt{2}}$

أي : $(\sqrt{2}-1)\,e \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq (\sqrt{2}-1)\,e^2$

منه : $\frac{(\sqrt{2}-1)\,e}{\sqrt{2}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq \frac{(\sqrt{2}-1)e^2}{\sqrt{2}-1}$

أي : $e \leq m \leq e^2$

التمرين ــ 39

f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و (u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_n = \int_0^n f(x)\,dx$

1 ــ بين أن (u_n) متزايدة

2 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{n-1}{2}$

3 ــ هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

الحـل ــ 39

1 ــ من أجل كل n من IN : $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx - \int_0^n f(x)\,dx$

$= \int_0^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_0^n f(x)\,dx$

$= \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

لتكن F دالة أصلية لــ f على $[0\,;+\infty[$ إذن : $u_{n+1} - u_n = F(n+1) - F(n)$

لكن $f(x) > 0$ على المجال $[0\,;+\infty[$ إذن : F متزايدة تماما على $[0\,;+\infty[$ لأن $F'(x) = f(x)$

منه : $F(n+1) > F(n)$ أي $F(n+1) - F(n) > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

نتيجة : (u_n) متزايدة تماما .

2 ـ من أجل كل x من $[1\,;+\infty[$: $\dfrac{x}{x+1} \geq \dfrac{1}{2}$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\displaystyle\int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx \geq \int_1^n \frac{1}{2}\,dx$

أي : $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx \geq \left[\frac{1}{2}x\right]_1^n$

أي : $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

أي : $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx \geq \frac{n-1}{2}$

لكن من أجل $n \in IN^*$: $\displaystyle u_n = \int_0^n f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^n f(x)\,dx$$

بما أن $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$ لأن F متزايدة تماما فإن : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^n f(x)\,dx > \frac{n-1}{2}$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN^*$: $u_n > \dfrac{n-1}{2}$

3 ـ لدينا : $u_n > \dfrac{n-1}{2}$

و $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$

إذن : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ أي المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

ملاحظة : (u_n) متزايدة تماما إذن $u_1 > u_0$ أي $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$ حيث $\left.\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 f(x)\,dx \\ u_0 &= \int_0^0 f(x)\,dx = 0 \end{aligned}\right\}$

التمرين – 39

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$

1 – بين أن : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n}$ ،

2 – هل المتتالية (u_n) متقاربة .

الحل – 39

1 – من أجل كل $n \in IN^*$: إذا كان $n \le x \le n+1$ فإن $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$

منه : $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\, dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx$

أي : $\left[\frac{1}{n+1}x\right]_n^{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le \left[\frac{1}{n}x\right]_n^{n+1}$

أي : $\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n}$

أي : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n}$ و هو المطلوب .

2 – $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ أي (u_n) متقاربة نحو 0

التمرين – 40

f دالة معرفة على المجال $[2 ; 5]$ بـ $f(x) = x - 3$

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمين اللذان معادلاتهما $x = 2$ و $x = 5$

الحل – 40

لندرس وضعية منحنى الدالة f بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[2 ; 5]$

x	2		3		5
$x - 3$		-	0	+	

نتيجة : لما $x \in [2 ; 3[$: المنحنى تحت محور الفواصل (f سالبة)

لما $x \in]3 ; 5]$: المنحنى فوق محور الفواصل (f موجبة)

منه : المساحة S للحيز المحدود بالمنحنى الممثل للدالة f و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 2$ و $x = 5$ هي :

$$S = \int_2^3 - f(x)\, dx + \int_3^5 f(x)\, dx$$

$$= \int_2^3 3 - x\, dx + \int_3^5 x - 3\, dx$$

$$= \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^5$$

$$= \left[9 - \frac{9}{2} - (6 - 2)\right] + \left[\frac{25}{2} - 15 - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right]$$

$$= 5 - \frac{9}{2} + \frac{25}{2} - \frac{9}{2} - 6$$

$$= \frac{25}{2} - 10$$

$$= 5/2$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين – 41

f دالة معرفة على $[-2 ; 2]$ بـ $f(x) = \begin{cases} -x : x \in [-2 ; 2] \\ 2x - 6 : x \in [2 ; 3] \end{cases}$

أحسب $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$

الحل — 41

بما أن f مستمرة على $[-2\,;\,3]$ فإن :

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2} -x\,dx + \int_{2}^{3} 2x - 6\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} + \left[x^2 - 6x\right]_{2}^{3}$$
$$= [-2 - (-2)] + [9 - 18 - (4 - 12)]$$
$$= -1$$

التمرين — 42

f دالة معرفة على المجال $[-1\,;\,5]$ بـ $f(x) = \begin{cases} x + 1 : -1 \le x \le 0 \\ -x + 1 : \ 0 < x \le 3 \\ x - 5 \ : \ 3 < x \le 5 \end{cases}$

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلاتهما $x = -1$ و $x = 5$

الحل — 42

f مستمرة على المجال $[-1\,;\,5]$ إذن : يكفي تحديد وضعية منحنى الدالة f بالنسبة لمحور الفواصل

على المجال $[-1\,;\,5]$ كمايلي :

x	$-\infty$		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+							
$-x+1$				+		+	0	-		-			
$x-5$				-						-	0	+	

نتيجة : لما $-1 \le x \le 0$ فإن $f(x) \ge 0$ أي المنحنى فوق محور الفواصل

لما $0 \le x \le 1$ فإن $f(x) \ge 0$ أي المنحنى فوق محور الفواصل

لما $1 \le x \le 3$ فإن $f(x) \le 0$ أي المنحنى تحت محور الفواصل

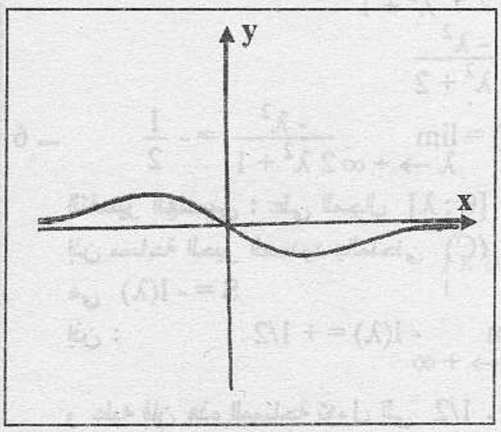
لما $3 \le x \le 5$ فإن $f(x) \le 0$ أي المنحنى تحت محور الفواصل

إذن : المساحة S للحيز المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ و $x = 5$ هي كمايلي :

$$S = \int_{-1}^{0} x + 1\,dx + \int_{0}^{1} -x + 1\,dx + \int_{1}^{3} -(-x + 1)\,dx + \int_{3}^{5} -(x - 5)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{3} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{3}^{5}$$
$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{-1}{2} + 1 - 0 + \frac{9}{2} - 3 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{25}{2} + 25 - \left(\frac{-9}{2} + 15\right)$$
$$= 5$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين — 43



إليك المنحنى (C) ذو المعادلة $y = \dfrac{-x}{(x^2 + 1)^2}$ في معلم متعامد

1 — عين المساحة A_1 لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم (D) ذو المعادلة $x = 1$

2 — اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند المبدأ .

3 — احسب المساحة A_2 لمثلث المحدد بـ (T) و محور الفواصل و المستقيم (D) و محور التراتيب .

4 — استنتج المساحة A لحيز المستوي المحدد بـ المنحنى (C) و المماس (T) و المستقيم (D) و محور التراتيب .

5 — احسب $I(\lambda) = \int_{0}^{\lambda} \dfrac{-x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما

6 — احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

الحل ـ 43

1 ـ حسب الشكل فإن المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل على المجال [0 ; 1] إذن :

$$A_1 = \int_0^1 - \left[\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}+1\right]$$

$= 1/4$ مقدر بوحدة قياس المساحة .

2 ـ نضع $f(x) = \frac{-x}{(x^2+1)^2}$ إذن : معادلة المماس (T) تكتب من الشكل : $y = f'(0)x + f(0)$

حيث : $f'(x) = \frac{-(x^2+1)^2 + 2x(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

إذن : $f'(0) = -1$ و $f(0) = 0$

إذن : (T) له المعادلة $y = -x$

3 ـ على المجال [0 ; 1] المستقيم (T) يقع تحت محور الفواصل إذن :

$A_2 = \int_0^1 -(-x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ مقدر بوحدة قياس المساحة .

4 ـ لندرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (T) على المجال [0 ; 1] :

$$f(x) - (-x) = \frac{-x}{(x^2+1)^2} + x = x\left[1 - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right]$$

بما أن $x \geq 0$ و $1 - \frac{1}{(x^2+1)^2} \geq 0$ فإن $f(x) - (-x) \geq 0$

إذن : المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (T) على المجال [0 ; 1]

منه : $A = A_2 - A_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ مقدرة بوحدة المساحة

5 ـ $\int_0^\lambda \frac{-x}{(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_0^\lambda$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\lambda^2+1}+1\right]$$

$$= \frac{-\lambda^2}{2\lambda^2+2}$$

6 ـ $\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-\lambda^2}{2\lambda^2+1} = -\frac{1}{2}$

التفسير الهندسي : على المجال $[0 ; \lambda]$ المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل .

إذن مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = \lambda$

هي $S = -I(\lambda)$

إذن : $\lim_{\lambda \to +\infty} S = \lim_{\lambda \to +\infty} -I(\lambda) = +1/2$

و عليه فإن هذه المساحة تؤول إلى 1/2 .

التمرين ـ 44

1 ـ x عدد حقيقي موجب تماما . باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0 ; +\infty[$

الحـل ـ44

1 ـ نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1/t^2 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = -1/t \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^x u(t) \cdot v'(t)\, dt$$
$$= [u(t) \cdot v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t) \cdot v(t)\, dt$$
$$= \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2} dt$$
$$= \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x$$
$$= \frac{-\ln x}{x} - \frac{-\ln 1}{1} + \frac{-1}{x} - \frac{-1}{1}$$
$$= 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

2 ـ حسب السؤال (1) : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ من أجل $x > 0$

إذن : الدالة $x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0 ; +\infty[$

و التي تنعدم من أجل $x = 1$

تحقيق : ليكن $F(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

إذن : $F(1) = 1 - 1 - 0 = 0$

و
$$F'(x) = \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

التمرين ـ 45

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية :

1 ـ $\int_1^e x \ln x\, dx$ 5 ـ $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\, dx$

2 ـ $\int_2^e \ln(x-1)\, dx$ 6 ـ $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx$

3 ـ $\int_0^\pi x \cos x\, dx$ 7 ـ $\int_1^2 (x-2) e^x\, dx$

4 ـ $\int_0^1 x e^x\, dx$ 8 ـ $\int_0^{\pi/3} 3x \sin 3x\, dx$

الحـل ـ 45

1 ـ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_1^e x \ln x\, dx = \int_1^e v'(x)\, u(x)\, dx$$
$$= [u(x) \cdot v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x) \cdot v(x)\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2+1}{4}$$

2 ـــ نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 1 \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ v(x) = x-1 \end{matrix}\right\}$

منه :

$$\int_2^e \ln(x-1)\,dx = \int_2^e u(x)\,.\,v'(x)\,dx$$

$$= [u(x)\,.\,v(x)]_2^e - \int_2^e u'(x)\,.v(x)\,dx$$

$$= \left[(x-1)\ln(x-1)\right]_2^e - \int_2^e \frac{x-1}{x-1}\,dx$$

$$= (e-1)\ln(e-1) - 1\ln 1 - \int_2^e 1\,dx$$

$$= (e-1)\ln(e-1) - [x]_2^e$$

$$= (e-1)\ln(e-1) - (e-2)$$

3 ـــ نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{matrix}\right\}$

منه :

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = \int_0^\pi u(x)\,.\,v'(x)\,dx$$

$$= [u(x)\,.\,v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$= \pi\sin\pi - 0 - [-\cos x]_0^\pi$$

$$= -(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= -2$$

4 ـــ نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{matrix}\right\}$

منه :

$$\int_0^1 x e^x\,dx = \int_0^1 u(x)\,.\,v'(x)\,dx$$

$$= [u(x)\,.\,v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e - 0 - [e^x]_0^1$$

$$= e - (e-1)$$

$$= 1$$

5 ـــ نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{-2}{3}(1-x)^{3/2} \end{matrix}\right\}$

منه :

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_{-1}^0 u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= [u(x)\,.\,v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{-2}{3}x(1-x)^{3/2}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \frac{2}{3}(2)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(1-x)^{\frac{3}{2}+1}\right)_{-1}^0$$

$$= \frac{-2}{3}(2\sqrt{2}) - \frac{4}{15}[(1-x)^{5/2}]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{-4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(1-(2)^{5/2})$$
$$= \frac{-4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(1-4\sqrt{2})$$
$$= \frac{-4\sqrt{2}-4}{15}$$

6 ـــ نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{2x-3} \end{cases}$

منه :
$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \left[x\sqrt{2x-3}\right]_2^3 - \int_2^3 \sqrt{2x-3}\,dx$$
$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{1} - \frac{1}{2}\int_2^3 2(2x-3)^{1/2}\,dx$$
$$= 3\sqrt{3} - 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(2x-3)^{3/2}\right]_2^3$$
$$= 3\sqrt{3} - 2 - \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}$$

7 ـــ نضع $\begin{cases} u(x) = x-2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

منه :
$$\int_1^2 (x-2)\,e^x\,dx = [(x-2)\,e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx$$
$$= 0 - (-e) - [e^x]_1^2$$
$$= e - (e^2 - e)$$
$$= 2e - e^2$$

8 ـــ نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = 3\sin 3x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos 3x \end{cases}$

منه :
$$\int_0^{\pi/3} 3x\sin 3x\,dx = [-x\cos 3x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos 3x\,dx$$
$$= -\frac{\pi}{3}\cos\pi - 0 + \left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/3}$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\pi - 0$$
$$= \pi/3$$

التمرين ـــ 46

1 ـــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2 ـــ بلستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

الحـل ـــ 46

1 ـــ من أجل كل x من IR : $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^x}{e^x}\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) = \dfrac{1}{1+e^x}$

2 ـــ التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{-1}{e^x+1} \end{cases}$

منه :
$$\int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x+1)^2} dx = \left[\frac{-x}{e^x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{e^x+1} dx$$
$$= \frac{-1}{e+1} - 0 - \int_0^1 \frac{-1}{e^x+1} dx$$
$$= \frac{-1}{e+1} - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$$ لأن حسب السؤال الأول $\frac{-1}{e^x+1} = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$
$$= \frac{-1}{e+1} - [\ln(e^{-x}+1)]_0^1$$
$$= \frac{-1}{e+1} - \left[\ln\left(\frac{1}{e}+1\right) - \ln(1+1)\right]$$
$$= \frac{-1}{e+1} - \ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

__التمرين – 47__

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين متتابعتين أحسب $\int_0^1 \mathbf{x^2 e^x dx}$

__الحل – 47__

نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{matrix}\right\}$

منه : $\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx$ .... (1)

لنحسب الأن $\int_0^1 2x e^x dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = 2x \\ v'(x) = e^x \end{matrix}\right\}$ إذن $\left.\begin{matrix} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{matrix}\right\}$

منه :
$$\int_0^1 2x e^x dx = [2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2 e^x dx$$
$$= 2e - 0 - 2[e^x]_0^1$$
$$= 2e - 2(e-1)$$
$$= 2$$

نعوض الأن $\int_0^1 2x e^x dx$ بـ 2 في المساواة (1) فنحصل على :
$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2$$
$$= e - 0 - 2$$
$$= e - 2$$

__التمرين – 48__

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب $\int_0^{\pi/4} \mathbf{x^2 \sin x\, dx}$

__الحل – 48__

نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin x \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\cos x \end{matrix}\right\}$

منه : $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx = [-x^2 \cos x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} 2x \cos x\, dx$ .... (1)

لنحسب الأن $\int_0^{\pi/4} 2x \cos x\, dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(x) = 2 \\ v(x) = \sin x \end{matrix}\right\}$

منه :
$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos x\, dx = [2x \sin x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2 \sin x\, dx$$
$$= \frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{4} - 0 + [2\cos x]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - 2\cos(0)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2$$
$$= \frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$$

نعوض الأن $\int_0^{\pi/4} 2x\cos x\,dx$ بـــ $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\,dx = [-x^2\cos x]_0^{\pi/4} + \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\right)$$
$$= \frac{-\pi^2}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 + \frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$$
$$= -\frac{\pi^2}{32}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$$

التمرين ـــ 49

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب I_n بدلالة n

الحـل ـــ 49

نضع $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos nx \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$ حيث $n \neq 0$

منه :
$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin nx\,dx$$
$$= \frac{\pi^2}{n}\sin n\pi - 0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$
$$= -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \;..........\; (1)$$

لنحسب الأن $\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin nx \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{n}\cos nx \end{cases}$ ،

منه :
$$\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[\frac{-x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-1}{n}\cos nx\,dx$$
$$= \frac{-\pi}{n}\cos n\pi - 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$
$$= \frac{-\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{-\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - \sin 0)$$
$$= \frac{-\pi}{n}\cos n\pi$$

نعوض الأن $\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$ بـــ $\frac{-\pi}{n}\cos n\pi$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{-2}{n}\left(\frac{-\pi}{n}\cos n\pi\right)$$

أي : $I_n = \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi$

أي : $I_n = \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n$ لأن :

$\cos n\pi = \begin{cases} 1 : & n \text{ زوجي} \\ -1 : & n \text{ فردي} \end{cases}$ أي $\cos n\pi = (-1)^n$

التمرين – 50

في كل حالة من الحالات التالية و باستعمال التكامل بالتجزئة ، عين دالة أصلية F للدالة f على المجال I و التي تحقق f(a) = 0 حيث a معطى .

1 – $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ حيث $I =]0 ; +\infty[$ و $a = 1$

2 – $f(x) = 2\,x\,e^{-x}$ حيث $I = R$ و $a = 0$

3 – $f(x) = x^2 \ln x$ حيث $I =]0 ; +\infty[$ و $a = 1$

الحل – 50

الدالة الأصلية للدالة f، و التي تنعدم عند a معرفة بـ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ كمايلي :

1 – نضع $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1/t^2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = -1/t \end{cases}$

منه : من أجل $x > 0$ فإن :

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}\,dt$$
$$= \frac{-\ln x}{x} - 0 - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x$$
$$= \frac{-\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

نتيجة : $F(x) = 1 - \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

تحقيق :

$$F(1) = 1 - 1(1 + 0) = 0$$
$$F'(x) = \frac{1}{x^2}(1 + \ln x) - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = f(x)$$

2 – ليكن $x \in IR$: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2\,t\,e^{-t}\,dt$

نضع $\begin{cases} u(t) = 2\,t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\,e^{-t} \end{cases}$

إذن :

$$F(x) = [-2\,t\,e^{-t}]_0^x - \int_0^x -2\,e^{-t}\,dt$$
$$= -2\,x\,e^{-x} - [2\,e^{-t}]_0^x$$
$$= -2\,x\,e^{-x} - (2\,e^{-x} - 2)$$
$$= 2 - 2\,x\,e^{-x} - 2\,e^{-x}$$

نتيجة : $F(x) = 2 - 2\,x\,e^{-x} - 2\,e^{-x}$

تحقيق :

$$F(0) = 2 - 0 - 2 = 0$$
$$F'(x) = -2\,e^{-x} + 2\,x\,e^{-x} + 2\,e^{-x} = 2\,x\,e^{-x} = f(x)$$

3 – ليكن $x > 0$: $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x t^2 \ln t\,dt$

نضع $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = t^2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

منه :

$$F(x) = \left[\frac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}\,t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}(x^3 - 1)$$

نتيجة : $F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$

تحقيق : $F'(x) = x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x)$

التمرين ــ 51

نضع : $I = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, d x$ و $J = \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, d x$

1 ــ أحسب $I + J$

2 ــ تحقق أن : $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) \, d x$

3 ــ إستنتج قيم كل من I و J

الحـل ــ 51

1 ــ

$$I + J = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, d x + \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, d x$$

$$= \int_0^{\pi/2} x(\cos^2 x + \sin^2 x) \, d x$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \, d x \quad \text{لأن} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

2 ــ

$$I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, d x - \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, d x$$

$$= \int_0^{\pi/2} x(\cos^2 x - \sin^2 x) \, d x$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, d x \quad \text{لأن} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة نحسب : $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

منه :

$$I - J = \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2x \, d x$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\pi - 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

نتيجة : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = -\frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \\ J = I + \frac{1}{2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} I = \frac{\pi^2 - 4}{16} \\ J = \frac{\pi^2 + 4}{16} \end{cases}$

التمرين ــ 52

(C) منحنى الدالة f على المجال [0 ; 1] حيث $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1 ــ أحسب α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال [0 ; 1]

2 ــ أحسب v الحجم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل .

الحــل ــ 52

1 ــ لندرس إشارة الدالة f على المجال [0 ; 1]

$\Delta = 9 - 8 = 1$ إذن : $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{array}\right\}$

منه :

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

إذن : على المجال [0 ; 1] المنحنى (C) فوق محور الفواصل $(f(x) \geq 0)$

إذن : $\alpha = \int_0^1 f(x)\, dx$

أي : $\alpha = \int_0^1 x^2 - 3x + 2\, dx$

أي : $\alpha = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^1$

أي : $\alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2$

أي : $\alpha = 5/6$

2 ــ

$$v = \int_0^1 \pi(x^2 - 3x + 2)^2\, dx$$
$$= \pi \int_0^1 x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4\, dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right]_0^1$$
$$= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{13}{3} - 6 + 4 \right)$$
$$= \frac{\pi}{30}(6 - 45 + 130 - 60)$$

$= \frac{31}{30}\pi$ مقدر بوحدة قياس الحجم

التمرين ــ 53

ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال [0 ; 1] حيث $f(x) = (x-1)e^x$

1 ــ أحسب α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال [0 ; 1]

2 ــ أحسب v حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل .

الحــل ــ 53

1 ــ على المجال [0 ; 1] لدينا $x - 1 \leq 0$ إذن : $(x-1)e^x \leq 0$ لأن $e^x > 0$

منه : $f(x) \leq 0$

أي : $\alpha = \int_0^1 -f(x)\, dx$

أي : $\alpha = \int_1^0 f(x)\, dx$

أي : $\alpha = \int_1^0 (x-1)e^x\, dx$

التكامل بالتجزئة : نضع $\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

منه . $\alpha = [(x-1)\, e^x]_1^0 - \int_1^0 e^x\, dx$

أي : $\alpha = - e^0 - 0 - [e^x]_1^0$

أي : $\alpha = -1 - (1 - e)$

أي : $\alpha = e - 2$

2 – $v = \int_0^1 \pi[(x-1)e^x]^2\, dx$

$= \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, e^{2x}\, dx$

$= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx - 2\pi \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx + \pi \int_0^1 e^{2x}\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

لنحسب $\int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx$ بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$

منه : $\int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$

$= \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

لنحسب $\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$ بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$

منه : $\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx = \left[\frac{x}{2} e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx$

$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$

$= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$

نتيجة (1) المساواة (2) تصبح : $\int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

نرجع إلى المساواة (1) : $V = \pi\left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) - 2\pi \int_0^1 x\, e^{2x}\, dx + \pi \int_0^1 e^{2x}\, dx$

$= \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi}{4} - 2\pi\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$ لأن $\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{\pi}{4}\,[e^2 - 1 - 2e^2 - 2 + 2e^2 - 2]$

$= \frac{\pi}{4}(e^2 - 5)$ مقدر بوحدة قياس الحجم

التمرين – 54

1 – أحسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

ليكن $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2}\, dx$

2 – أحسب $I + J$ ثم إستنتج قيمة J .

الحـل ـ 54

1 ـ $$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

2 ـ $$I + J = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x+x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= 1/2$$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} I = \frac{1}{2}\ln 2 \\ I + J = 1/2 \end{matrix}\right\}$ إذن : $J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ أي : $J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

التمرين ـ 55

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (1-x)\,e^x$

1 ـ بين أن من أجل كل x من IR : $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$

2 ـ إستنتج $\int_0^1 f(x)\,dx$

الحـل ـ 55

1 ـ من أجل كل x من IR : $f'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -e^x + e^x - x\,e^x = -x\,e^x$

إذن : $f''(x) = -e^x - x\,e^x$

منه : $f(x) + f''(x) = (1-x)\,e^x - e^x - x\,e^x$

$= e^x(1 - x - 1 - x)$

$= -2x\,e^x$

$= 2f'(x)$ و هو المطلوب .

2 ـ حسب السؤال (1) فإن : $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$

إذن : $f(x) = 2f'(x) - f''(x)$

منه : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2f'(x)\,dx - \int_0^1 f''(x)\,dx$

أي : $\int_0^1 f(x)\,dx = 2[f(x)]_0^1 - [f'(x)]_0^1$ لأن $\left\{\begin{matrix} f \text{ دالة أصلية لـ } f' \\ f' \text{ دالة أصلية لـ } f'' \end{matrix}\right.$

أي : $\int_0^1 f(x)\,dx = 2[(1-x)\,e^x]_0^1 - [-x\,e^x]_0^1$

أي : $\int_0^1 f(x)\,dx = 2(0-1) - (-e-0)$

أي : $\int_0^1 f(x)\,dx = e - 2$

التمرين ـ 56

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

1 ــ بين أن من أجل كل x من IR : $f'(x) + 2f(x) = \dfrac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

2 ــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

3 ــ α عدد حقيقي موجب تماما. أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بــ منحنى الدالة f و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 0$ و $x = \alpha$

الحـل ــ 56

1 ــ من أجل كل x من IR :

$$f'(x) = -2e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{2e^{x}}{1+2e^{x}}e^{-2x}$$

$$= -2e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

منه :

$$f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}} + 2e^{-2x}\ln(1+2e^{x})$$

$$= \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

2 ــ حسب السؤال (1) :

$$f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

إذن :

$$2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}} - f'(x)$$

أي :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} - \frac{1}{2}f'(x)$$

منه :

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\,dx - \int \frac{1}{2}f'(x)\,dx$$

منه : $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}f(x) + \int \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\,dx$ لأن $\int f'(x)\,dx = f(x)$

منه :

$$\int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}f(x) + \int \frac{e^{-x}}{e^{x}(e^{-x}+2)}\,dx$$

منه :

$$\int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}f(x) + \int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2}\,dx$$

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} e^{-2x} & e^{-x}+2 \\ \cline{2-2} e^{-2x}+2e^{-x} & e^{-x} \\ \hline -2e^{-x} & \end{array}$$

إذن :

$$\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

منه :

$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2}\,dx = \int e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}\,dx$$

$$= -e^{-x} + 2\ln|e^{-x}+2|$$

نتيجة : $F(x) = \int f(x)\,dx = \dfrac{-1}{2}e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - e^{-x} + 2\ln|e^{-x}+2|$

و هي عبارة الدالة الأصلية للدالة f .

تحقيق :

$$F'(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - \frac{1}{2}e^{-2x}\left(\frac{2e^{x}}{1+2e^{x}}\right) + e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} + e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(1+2e^{x})}$$

$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} + e^{-x} - \frac{2}{1+2e^{x}}$$

$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{-e^{-x} + e^{-x}(1+2e^{x}) - 2}{1+2e^{x}}$$

$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{-e^{-x} + e^{-x} + 2 - 2}{1+2e^{x}}$$

$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + 0$$

$$= f(x)$$

3 ـــ لاحظ أن $f(x) > 0$ من أجل كل x من IR إذن : $A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,d\,x$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} \ln(1+2e^x) - e^{-x} + 2\ln(e^{-x}+2)\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{-1}{2} e^{-2\alpha} \ln(1+2e^\alpha) - e^{-\alpha} + 2\ln(e^{-\alpha}+2) - \left(-\frac{1}{2}\ln 3 - 1 + 2\ln 3\right)$$

مقدر بوحدة المساحة $= \frac{-1}{2} e^{-2\alpha} \ln(1+2e^\alpha) - e^{-\alpha} + 2\ln(e^{-\alpha}+2) + 1 - \frac{3}{2}\ln 3$

التمرين ـــ 57

ليكن $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,d\,x$

1 ـــ أحسب $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

2 ـــ أحسب $I + J$ ثم إستنتج قيمة I .

الحــل ـــ 57

1 ـــ $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,d\,x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,d\,x = \frac{1}{2}\left[\ln|1+2\sin x|\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}$

2 ـــ $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} + \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,d\,x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x}\,d\,x$

لدينا : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

منه : $\sin 2x + \cos x = 2\sin x\cos x + \cos x = \cos x(1+2\sin x)$

إذن : $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(1+2\sin x)}{1+2\sin x}\,d\,x = \int_0^{\pi/2} \cos x\,d\,x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

3 ـــ لدينا : $\begin{cases} J = \frac{\ln 3}{2} \\ I + J = 1 \end{cases}$ إذن : $I = 1 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{2 - \ln 3}{2}$

التمرين ـــ 58

المستوي منسوب إلى معلم متعامد .

r عدد حقيقي موجب تماما. (C) منحنى معادلته $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

1 ـــ حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x\,;\,y)$ حيث $0 \le x \le r$ و $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$

2 ـــ إستنتج $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x$ و $\int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x$

الحــل ـــ 58

1 ـــ (C) له المعادلة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ أي $y^2 = r^2 - x^2$ أي : $x^2 + y^2 = r^2$ مع $y \ge 0$

إذن : (C) هو نصف الدائرة التي مركزها $O(0\,;\,0)$ و نصف قطرها r و الواقع فوق محور الفواصل .

منه : مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x\,;\,y)$ حيث $0 \le x \le r$ و $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$ هو حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = r$ و هذا الجزء هو ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر r و التي مساحتها $S = \pi r^2$

2 ـــ حسب السؤال السابق العدد $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x$ هو مساحة ربع الدائرة التي نصف قطرها r

إذن : $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x = \frac{\pi}{4} r^2$

نفس الشئ بالنسبة لــ $\int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x$ إذن : $\int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x = \frac{\pi}{4} r^2$

التمرين ـــ 59

f دالة معرفة على $IR - \{1\}$ بـــ $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1 - x}$

1 ـــ عين الأعداد الحقيقية $d\,;\,c\,;\,b\,;\,a$ حيث من أجل $x \ne 1$: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c + \frac{d}{1 - x}$

2 ــ أحسب $I = \int_0^{1/2} f(x)\,dx$

3 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $J = \int_0^{1/2} (3x^2 - 12x + 1)\ln(1-x)\,dx$

الحل ــ 59

1 ــ من أجل $x \neq 1$ فإن :

$$f(x) = -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + x & 1 - x \\ \underline{x^3 - x^2} & \overline{-x^2 + 5x + 4} \\ -5x^2 + x & \\ \underline{-5x^2 + 5x} & \\ -4x & \\ \underline{-4x + 4} & \\ -4 & \end{array}$$

تحقيق :

$$-x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x} = \frac{-x^2 + x^3 + 5x - 5x^2 + 4 - 4x - 4}{1-x}$$

$$= \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x} = f(x)$$

2 ــ

$$I = \int_0^{1/2} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 4\ln|1-x|\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{-1}{24} + \frac{5}{8} + 2 + 4\ln\frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{31}{12} - 4\ln 2$$

3 ــ

$$J = \int_0^{1/2} (3x^2 - 12x + 1)\ln(1-x)\,dx$$

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln(1-x) \\ v'(x) = 3x^2 - 12x + 1 \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = \frac{-1}{1-x} \\ v(x) = x^3 - 6x^2 + x \end{array}\right.$

منه :

$$J = [(x^3 - 6x^2 + x)\ln(1-x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{-(x^3 - 6x^2 + x)}{1-x}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{2} - 0 + \int_0^{1/2} \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}\,dx$$

$$= \frac{1 - 12 + 4}{8}\ln\frac{1}{2} + \int_0^{1/2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{-7}{8}\ln\frac{1}{2} + I$$

$$= \frac{7}{8}\ln 2 + \frac{31}{12} - 4\ln 2$$

$$= \frac{31}{12} - \frac{25}{8}\ln 2$$

التمرين ــ 60

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I و التي تنعدم من أجل القيمة α في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ $f(t) = \ln(t^2)$: $I =]0\,;+\infty[$ و $\alpha = 1$

2 ــ $f(t) = (2t+1)\sin t$: $I = \mathbb{R}$ و $\alpha = 0$

3 ــ $f(t) = \ln(t+1)$: $I =]-1\,;+\infty[$ و $\alpha = 0$

4 ــ $f(t) = (t+1)^2 e^{2t}$: $I = \mathbb{R}$ و $\alpha = -1$

الحل ــ 60

في كل حالة الدالة F الأصلية لــ f تنعدم عند α معرفة بــ $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$

1 ــ $f(t) = \ln(t^2) = 2\ln|t|$ إذن : على المجال $]0\,;+\infty[$: $f(t) = 2\ln t$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 2 \end{array}\right\}$ منه $\left.\begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = 2t \end{array}\right\}$

إذن :
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x 2 \ln t \, dt \\ &= [2t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{2t}{t} dt \\ &= 2x \ln x - 0 - \int_1^x 2 \, dt \\ &= 2x \ln x - [2t]_1^x \\ &= 2x \ln x - (2x - 2) \\ &= 2x \ln x - 2x + 2 \end{aligned}$$

تحقيق : $F(1) = 0 - 2 + 2 = 0$

$$F'(x) = 2 \ln x + \frac{2x}{x} - 2 = 2 \ln x = \ln x^2 = f(x)$$

2 — $F(x) = \int_0^x (2t+1) \sin t \, dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = 2t + 1 \\ v'(t) = \sin t \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\cos t \end{array}\right\}$

منه :
$$\begin{aligned} F(x) &= [-(2t+1)\cos t]_0^x - \int_0^x -2\cos t \, dt \\ &= -(2x+1)\cos x + 1 + 2[\sin t]_0^x \\ &= -(2x+1)\cos x + 1 + 2\sin x \end{aligned}$$

3 — $F(x) = \int_0^x \ln(t+1) \, dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln(t+1) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{t+1} \\ v(t) = t + 1 \end{array}\right\}$

منه :
$$\begin{aligned} F(x) &= [(t+1)\ln(t+1)]_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{t+1} dt \\ &= (x+1)\ln(x+1) - 0 - \int_0^x 1 \, dt \\ &= (x+1)\ln(x+1) - [t]_0^x \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x \end{aligned}$$

4 — $F(x) = \int_{-1}^x (t+1)^2 e^{2t} \, dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = (t+1)^2 \\ v'(t) = e^{2t} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 2(t+1) \\ v(x) = \dfrac{1}{2} e^{2t} \end{array}\right\}$

منه :
$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{1}{2}(t+1)^2 e^{2t}\right]_{-1}^x - \int_{-1}^x (t+1) e^{2t} dt \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} e^{2x} - \int_{-1}^x (t+1) e^{2t} dt \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

لنحسب بالتجزئة $\int_{-1}^x (t+1) e^{2t} \, dt$ كما يلي :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = t + 1 \\ v'(t) = e^{2t} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2} e^{2t} \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_{-1}^x (t+1) e^{2t} dt = \left[\frac{t+1}{2} e^{2t}\right]_{-1}^x - \int_{-1}^x \frac{1}{2} e^{2t} dt = \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{-1}^x$$

أي : $\int_{-1}^{x}(t+1)\,e^{2t}\,dt = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2})$

بالرجوع إلى العلاقة (1) : $F(x) = \frac{(x+1)^2}{2}e^{2x} - \frac{x+1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2})$

$$= \frac{x^2+2x+1-x-1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2}$$

$$= \frac{x^2+x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2}$$

التمرين — 61

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين عين دالة أصلية F للدالة f على IR
حيث $f(t) = e^{-2t}\cos t$ و $F(0) = 0$

الحل — 61

$$F(x) = \int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt$$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = e^{-2t} \\ v'(t) = \cos t \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = -2e^{-2t} \\ v(t) = \sin t \end{array}\right\}$

منه : $\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt = [e^{-2t}\sin t]_0^x - \int_0^x -2e^{-2t}\sin t\,dt$ .... (1)

لنحسب الأن بالتجزئة $\int_0^x -2e^{-2t}\sin t\,dt$ كمايلي :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = 2e^{-2t} \\ v'(t) = -\sin t \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = -4e^{-2t} \\ v(t) = \cos t \end{array}\right\}$

منه : $\int_0^x -2e^{-2t}\sin t\,dt = [2e^{-2t}\cos t]_0^x - \int_0^x -4e^{-2t}\cos t\,dt$

أي : $\int_0^x -2e^{-2t}\sin t\,dt = [2e^{-2t}\cos t]_0^x + 4\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على :

$$\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt = [e^{-2t}\sin t]_0^x - \left([2e^{-2t}\cos t]_0^x + 4\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt\right)$$

أي : $\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt + 4\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt = [e^{-2t}\sin t]_0^x - [2e^{-2t}\cos t]_0^x$

منه : $5\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt = e^{-2x}\sin x - (2e^{-2x}\cos x - 2)$

أي : $\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt = \frac{1}{5}(e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x + 2)$

نتيجة : $F(x) = \frac{1}{5}(e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x + 2)$

تحقيق : $F'(x) = (-2e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x + 4e^{-2x}\cos x + 2e^{-2x}\sin x) \times \frac{1}{5}$

$$= e^{-2x}\cos x = f(x)$$

$$F(0) = \frac{1}{5}(0 - 2 + 2) = 0$$

التمرين — 62

باستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية F للدالة f على $]0\,;+\infty[$ المعرفة بـ $f(t) = (\ln t)^2$ حيث $F(1) = 0$

الحل — 62

$$F(x) = \int_1^x (\ln t)^2\,dt$$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = (\ln t)^2 \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \frac{2}{t}\ln t \\ v(t) = t \end{array}\right\}$

منه :
$$F(x) = [t(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x \frac{2\,t}{t} \ln t\,dt$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\int_1^x \ln t\,dt$$
$$= x(\ln x)^2 - 2[t\ln t - t]_1^x$$
$$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x + 1]$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\,x\ln x + 2\,x - 2$$

ملاحظة : الدالة $t \longmapsto t\ln t - t$ هي دالة أصلية للدالة $t \longmapsto \ln t$ عل المجال $]0 ; +\infty[$

التمرين – 63

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx$

1 – بين أن من أجل كل x من $[0 ; 1]$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2 – إستنتج حصرا للعدد u_n ثم بين أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **و** $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$

الحل – 63

1 – $0 \le x \le 1$ إذن : $e^0 \le e^x \le e^1$

أي : $1 \le e^x \le e$

منه : $2 \le 1 + e^x \le e + 1$

منه : $\frac{1}{e+1} \le \frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}$

منه : $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$ لأن $e^{nx} > 0$

2 – بما أن $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$ فإن $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e}\,dx \le \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx \le \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}\,dx$

أي : $\frac{1}{1+e}\int_0^1 e^{nx}\,dx \le u_n \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,dx$

منه : $\frac{1}{1+e}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 \le u_n \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1$

أي : $\frac{1}{n(1+e)}(e^n - 1) \le u_n \le \frac{1}{2\,n}(e^n - 1)$

لدينا :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\,n}(e^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{2\,n} - \frac{1}{2\,n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{2\,n}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(1+e)}(e^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n(1+e)} - \frac{1}{n(1+e)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n(1+e)}$$
$$= +\infty$$

نتيجة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ حسب خاصية الحصر.

من جهة أخرى : $\frac{1}{n(1+e)}(e^n - 1) \le u_n \le \frac{1}{2\,n}(e^n - 1)$

إذن : $\frac{1}{n\,e^n(1+e)}(e^n - 1) \le \frac{u_n}{e^n} \le \frac{1}{2\,n\,e^n}(e^n - 1)$

لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2ne^n}(e^n - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{2ne^n} - \frac{1}{2ne^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2ne^n}$$

$$= 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{ne^n(1+e)}(e^n - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{ne^n(1+e)} - \frac{1}{ne^n(1+e)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(1+e)} - \frac{1}{ne^n(1+e)}$$

$$= 0$$

إذن : حسب خاصية الحصر فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$

حلول تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين – 1

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{1+e^x}$

1 – بين أن من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\dfrac{e^x}{1+e^x} \le f(x) \le x$

2 – إستنتج حصرا لمساحة حيز المستوي المكون من مجموعة النقط $M(x ; y)$ حيث : $1 \le x \le \lambda$ و $0 \le y \le f(x)$

حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

الحل – 1

1 – من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $f(x) - x = \dfrac{x\,e^x}{1+e^x} - x = x\left[\dfrac{e^x - 1 - e^x}{1+e^x}\right] = \dfrac{-x}{1+e^x}$

بما أن $\dfrac{x}{1+e^x} \ge 0$ على المجال $[1 ; +\infty[$ فإن $\dfrac{-x}{1+e^x} \le 0$

إذن : $f(x) \le x$ .... (1)

من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $f(x) - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{x\,e^x}{1+e^x} - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}(x-1)$

بما أن $x - 1 \ge 0$ و $\dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$ على المجال $[1 ; +\infty[$ فإن $\dfrac{e^x}{1+e^x}(x-1) \ge 0$

إذن : $f(x) \ge \dfrac{e^x}{1+e^x}$ .... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\dfrac{e^x}{1+e^x} \le f(x) \le x$

2 – لدينا : $\dfrac{e^x}{1+e^x} \le f(x) \le x$ من أجل $x \in [1 ; +\infty[$

إذن : $\displaystyle\int_1^{\lambda} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \le \int_1^{\lambda} f(x)\,dx \le \int_1^{\lambda} x\,dx$

أي : $\displaystyle\Big[\ln|1+e^x|\Big]_1^{\lambda} \le \int_1^{\lambda} f(x)\,dx \le \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^{\lambda}$

أي : $\displaystyle\ln|1+e^{\lambda}| - \ln|1+e| \le \int_1^{\lambda} f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}$

نتيجة : بما أن منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل على المجال $[1 ; +\infty[$ و خاصة على المجال $[1 ; \lambda]$ فإن مساحة الحيز المحدود بمنحناها و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = \lambda$ هي نفسها مساحة الحيز المكون من مجموعة النقط $M(x ; y)$ حيث $1 \le x \le \lambda$ و $0 \le y \le f(x)$ أي إذا كانت S هذه المساحة

فإن : $\ln|1+e^{\lambda}| - \ln|1+e| \le S \le \dfrac{1}{2}\lambda^2 - \dfrac{1}{2}$

التمرين – 2

f دالة معرفة على $]-\infty ; 0[$ بـ $f(x) = 1 - \dfrac{\ln x^2}{x}$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2 – أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

3 – بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-1 \le \alpha \le -1/2$

4 – أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ ؛ $x = \alpha$ و $y = 1$

5 ـــ بين أن $A(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4}$ ثم إستنتج حصرا لـ $A(\alpha)$

الحـل ـــ 2

1 ـــ التغيرات : f معرفة على IR^* و خاصة على $]-\infty ; 0[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 - 2\frac{\ln|x|}{x} = 1$$ لأن $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; 0[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{\frac{2x^2}{x^2} - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x^2 - 2$ كمايلي :

$$\ln x^2 - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \ln x^2 \ge \ln e^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 \ge e^2$$
$$\Leftrightarrow (x-e)(x+e) \ge 0$$
منه $\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -e]\cup[e ; +\infty[$

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$\ln x^2 - 2$		+	0	-	‖	-	0	+	

إذن : إشارة $f'(x)$ على $]-\infty ; 0[$ كما يلي :

x	$-\infty$		$-e$		0
$f'(x)$		+	0	-	‖

منه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-e$		α		0
$f'(x)$		+	0	-		-	‖
$f(x)$	1	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖

$$f(-e) = 1 - \frac{\ln e^2}{-e} = 1 + \frac{2}{e}$$

2 ـــ وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

$$f(x) - 1 = 1 - \frac{\ln x^2}{x} - 1 = -\frac{\ln x^2}{x}$$

من إشارة $\ln x^2$ لأن $-x > 0$ كمايلي :

$$\ln x^2 \ge 0 \Leftrightarrow \ln x^2 \ge \ln 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 \ge 1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1]\cup[1 ; +\infty[$$

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; -1[$ المنحنى فوق المستقيم .

لما $x = -1$ المنحنى يقطع المستقيم .

لما $x \in]-1 ; 0[$ المنحنى تحت المستقيم .

3 ـــ من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة f تنعدم مرة واحدة على المجال $]-e ; 0[$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا :

$$f(-1) = 1 - \frac{\ln 1}{-1} = 1$$

$$f(-1/2) = 1 - \frac{\ln\frac{1}{4}}{-1/2} = 1 + 2\ln\frac{1}{4} = 1 - 2\ln 4$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [-1\,;-1/2] \\ f(-1)\times f(-1/2)<0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $[-1\,;-1/2]$ حيث $f(\alpha)=0$

بما أن f متناقصة تماما على $[-1\,;-1/2]$ فإن α وحيد .

4 ــ على المجال $]-1\,;0[$ المنحنى (C) تحت المستقيم ذو المعادلة $y=1$ إذن : $A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha} 1-f(x)\,dx$

منه :
$$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}\frac{\ln x^2}{x}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{\alpha}\frac{2\ln|x|}{x}\,dx$$
$$=2\int_{-1}^{\alpha}\frac{1}{x}\ln|x|\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}(\ln|x|)^2\right]_{-1}^{\alpha}$$
$$=[(\ln|x|)^2]_{-1}^{\alpha}$$
$$=(\ln|\alpha|)^2$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة القياس .

5 ــ لدينا $f(\alpha)=0$ أي : $1-\dfrac{\ln\alpha^2}{\alpha}=0$

منه : $\dfrac{\ln\alpha^2}{\alpha}=1$

أي : $\dfrac{2\ln|\alpha|}{\alpha}=1$

أي : $\ln|\alpha|=\dfrac{\alpha}{2}$

منه : $(\ln|\alpha|)^2=\dfrac{\alpha^2}{4}$

نتيجة : $A(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{4}$ و هو المطلوب .

الحصر : $-1\le\alpha\le-1/2$ إذن : $1/4<\alpha^2<1$

منه : $1/16<\dfrac{\alpha^2}{4}<1/4$

نتيجة : $1/16<A(\alpha)<1/4$ و هو الحصر المطلوب .

<u>التمرين ــ 3</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=2e^{\frac{1}{2}x+1}-x-2$ نسمي (C) منحناها في معلم متعامد .

1 ــ أدرس إشارة $f(x)-(-x-2)$ على IR

2 ــ أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ؛ $x=\alpha$ ؛ $y=-x-2$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما .

3 ــ نعرف المتتالية (u_n) على IN^* بـ $u_n=A(n)+4e$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول .

<u>الحل ــ 3</u>

1 ــ $f(x)-(-x-2)=2e^{\frac{1}{2}x+1}$

إذن : من أجل كل x من IR : $f(x)-(-x-2)>0$

2 ــ حسب السؤال (1) $f(x)-(-x-2)>0$ إذن : المنحنى (C) يقع دائما فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-x-2$

منه :
$$A(\alpha)=\int_{0}^{\alpha} f(x)-(-x-2)\,dx$$
$$=\int_{0}^{\alpha} 2e^{\frac{1}{2}x+1}\,dx$$

$$= 2\,e\int_0^{\alpha} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$
$$= 2\,e\left[2\,e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{\alpha}$$
$$= 2\,e\left[2\,e^{\frac{1}{2}\alpha} - 2\right]$$
$$= 4\,e\,.\,e^{\frac{1}{2}\alpha} - 4\,e$$

ملاحظة : المساحة $A(\alpha)$ مقدرة بوحدة قياس المساحة .

3 ـ من أجل كل n من IN^* : $u_n = A(n) + 4\,e$
$$= 4\,e\,.\,e^{\frac{1}{2}n} - 4\,e + 4\,e$$
$$= 4\,e(e^{1/2})^n$$

منه :
$$u_{n+1} = 4\,e(e^{1/2})^{n+1}$$
$$= 4\,e(e^{1/2})\,.\,(e^{1/2})^n$$
$$= e^{1/2}\,u_n$$

إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $e^{1/2} = \sqrt{e}$ و حدها الأول $u_1 = 4\,e\sqrt{e}$

التمرين ـ 4

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$

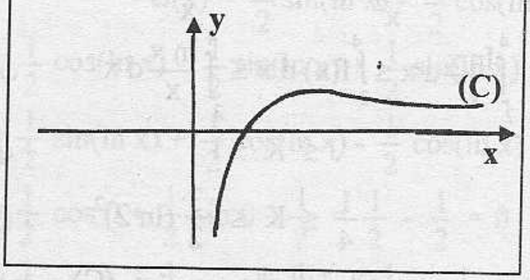
1 ـ بين أن من أجل كل $x > 1$: $\dfrac{\ln x}{x^2} \le f(x) \le \dfrac{\ln x}{x}$

2 ـ أحسب $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$ و $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

3 ـ إستنتج حصرا لـ $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$

إليك الشكل التالي لمنحنى الدالة f في معلم متعامد حيث $\|\vec{i}\| = 1\text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 4\text{ cm}$

4 ـ باستعمال الحصر الموجود في السؤال (3) أعط حصرا بـ cm^2 للمساحة A لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي حيث $2 \le x \le 4$ و $0 \le y \le f(x)$



الحـل ـ 4

1 ـ ليكن $x > 1$:
$$f(x) - \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x^2 + x} - \frac{\ln x}{x}$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{2 - x - 1}{x+1}\right)$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{1 - x}{x+1}\right)$$

بما أن $x \ge 1$ فان $\begin{cases} 1 - x \le 0 \\ x + 1 > 0 \\ \dfrac{\ln x}{x} \ge 0 \end{cases}$ إذن : $\dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right) \le 0$

منه : $f(x) - \dfrac{\ln x}{x} \le 0$

أي : $(1) \ldots\ldots\ldots f(x) \le \dfrac{\ln x}{x}$

من جهة أخرى :
$$f(x) - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2\ln x}{x^2+x} - \frac{\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{x-1}{x^2+x}\right)$$

بما أن $x \geq 1$ فإن $\left.\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x^2+x > 0 \\ \dfrac{\ln x}{x} \geq 0 \end{array}\right\}$ إذن $\dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x}\right) \geq 0$

أي $f(x) - \dfrac{\ln x}{x^2} \geq 0$

أي $(2)\ldots\ldots\ldots \; f(x) \geq \dfrac{\ln x}{x^2}$

نتيجة : من (1) و (2) فإن : $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$ من أجل $x > 1$

2 ـ
$$I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^4 = \frac{1}{2}(\ln 4)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = \frac{3}{2}(\ln 2)^2$$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1/x^2 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1/x \\ v'(x) = -1/x \end{array}\right\}$

منه :
$$J = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{-1}{x^2}\,dx$$
$$= \frac{-\ln 4}{4} + \frac{\ln 2}{2} + [-1/x]_2^4$$
$$= \frac{-2\ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$
$$= 1/4$$

3 ـ لدينا من أجل $x > 1$: $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$

إذن : $\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq \int_2^4 f(x)\,dx \leq \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$

أي : $J \leq K \leq I$

أي : $\dfrac{1}{4} \leq K \leq \dfrac{3}{2}(\ln 2)^2$

4 ـ حسب الشكل فإن المنحنى (C) فوق محور الفواصل إذن :
$$A = \int_2^4 f(x)\,dx \,.\, \|\vec{i}\| \,.\, \|\vec{j}\| \,.\, cm^2 = K \,.\, 4\,cm^2$$

بما أن $\dfrac{1}{4} \leq K \leq \dfrac{3}{2}(\ln 2)^2$ فإن $4\left(\dfrac{1}{4}\right) cm^2 \leq 4\,K\,cm^2 \leq 4 \times \dfrac{3}{2}(\ln 2)^2\,cm^2$

أي : $1\,cm^2 \leq A \leq 6(\ln 2)^2\,cm^2$ و هو المطلوب .

<u>التمرين ـ 5</u>

F و G دالتان أصليتان على $]0\,;+\infty[$ للدالتين $t \longmapsto \cos(\ln t)$ و $t \longmapsto \sin(\ln t)$
على الترتيب و اللتان تنعدمان عند 1

1 ـ بين باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$
و : $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$

2 ـ إستنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$

<u>الحل ـ 5</u>

1 ـ تعريفا لدينا : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \cos(\ln t)\,dt$ حيث $x > 0$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \cos(\ln t) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \frac{-1}{t}\sin(\ln t) \\ v(t) = t \end{array}\right\}$

منه : $F(x) = [t\cos(\ln t)]_1^x - \int_1^x \frac{-t}{t}\sin(\ln t)\, d\, t$

$$= x\cos(\ln x) - \cos(\ln 1) + \int_1^x \sin(\ln t)\, d\, t$$

$$(1)\ldots\ldots\ldots = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \quad \text{لأن} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\, d\, t$$

تعريفا دائما لدينا : $G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\, d\, t$ حيث $x > 0$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \sin(\ln t) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t) \\ v(t) = t \end{array}\right\}$

إذن : $G(x) = [t\sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}\cos(\ln t)\, d\, t$

$$= x\sin(\ln x) - \sin(\ln 1) - \int_1^x \cos(\ln t)\, d\, t$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots = x\sin(\ln x) - F(x)$$

2 ــ حسب السؤال (1) لدينا $\left.\begin{array}{l} F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \\ G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \end{array}\right\}$

بجمع المساوتين طرف لــ طرف نحصل على :

$$F(x) + G(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) + x\sin(\ln x) - F(x)$$

أي : $2F(x) = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - 1$

منه : $F(x) = \frac{x}{2}\cos(\ln x) + \frac{x}{2}\sin(\ln x) - \frac{1}{2}$

بالتعويض في المساواة (2) نحصل على :

$$G(x) = x\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) - \frac{x}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}$$

أي : $G(x) = \frac{x}{2}\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}$

تحقيق : $F'(x) = \frac{1}{2}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}\cos(\ln x) = \cos(\ln x)$

$$G'(x) = \frac{1}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}\sin(\ln x) = \sin(\ln x)$$

$$F(1) = \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$G(1) = \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

التمرين ــ 6

f دالة معرفة على [0 ; 1] بــ $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$

1 ــ بين أن f مستمرة و موجبة على [0 ; 1]

2 ــ أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]0 ; 1[$

3 ــ إستنتج تغيرات الدالة f على المجال [0 ; 1]

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

نعتبر النقطة I(1/2 ; 0) و لتكن M نقطة من (C) فاصلتها x حيث $0 \le x \le 1$

4 ــ أحسب IM^2

5 ــ بين أن (C) هي نصف دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها

6 ــ فسر هندسيا التكامل $\int_0^1 f(x)\, d\, x$ ثم أثبت أن $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, d\, x = \pi/8$

الحـــل ــ 6

1 ــ الدالة f هي مركب الدالتين $u : x \longmapsto x(1-x)$ و $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ الموجبتين و المستمرتين على [0 ; 1]

إذن : f مستمرة و موجبة على $[0 ; 1]$

2 ــ من أجل كل x من $]0 ; 1[$: $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-2x$ لأن $2\sqrt{x(1-x)} > 0$

x	0		1/2		1
1 − 2 x		+	0	-	

3 ــ من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	0		1/2		1
f '(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$
$$f(1) = \sqrt{0} = 0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

4 ــ M نقطة من (C) فاصلتها x إذن ترتيبها $y = f(x)$

منه : $M(x ; \sqrt{x(1-x)})$ حيث $0 \leq x \leq 1$

إذن : $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ \sqrt{x(1-x)} - 0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ \sqrt{x(1-x)} \end{pmatrix}$

منه : $IM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x(1-x)}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + x - x^2 = \frac{1}{4}$

5 ــ حسب السؤال السابق $IM^2 = 1/4$ إذن : $IM = 1/2$ أي النقطة M من (C) تبعد بمسافة ثابتة عن النقطة I و تساوي 1/2 إذن فهي تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $I(1/2 ; 0)$ و نصف القطر 1/2

بما أن الدالة f موجبة فإن (C) هو نصف هذه الدائرة الذي يقع فوق محور الفواصل

6 ــ المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل لأن f موجبة إذن التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز المحدد بــ (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 1$ أي هو نصف مساحة الدائرة ذات المركز I و نصف القطر 1/2

منه : $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\pi \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$ أي $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{\pi}{8}$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة القياس .

<u>التمرين ــ 7</u>

f دالة معرفة على $[0 ; 1]$ بــ $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$

1 ــ أحسب مشتقة الدالة $u : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2}$

2 ــ إستنتج $f'(x)$

3 ــ أحسب $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$

4 ــ نضع $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}}\,dx$ و $K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2}\,dx$

تحقق أن : $J + 2I = K$

5 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة لحساب K بين أن : $K = \sqrt{3} - J$

6 ـ إستنتج قيم كل من J و K

الحـل ـ 7

1 ـ $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

2 ـ $f'(x) = \frac{1+u'(x)}{x+u(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{(x+\sqrt{x^2+2})\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

3 ـ $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = [f(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

4 ـ $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$= \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$

5 ـ $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$ لنحسب هذا التكامل بالتجزئة كما يلي :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = \sqrt{x^2+2} \\ v'(x) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ v(x) = x \end{array}\right\}$

منه : $K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \sqrt{3} - J$

6 ـ لدينا : $\left.\begin{array}{l} (1) \ldots\ldots\ I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2} \\ (2) \ldots\ldots\ J + 2I = K \\ (3) \ldots\ldots\ K = \sqrt{3} - J \end{array}\right\}$

نعوض (3) في (2) نحصل على : $J + 2I = \sqrt{3} - J$

منه : $2J = \sqrt{3} - 2I$

أي : $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I$

أي : $(4) \ldots\ldots\ J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}$

نعوض (4) في (3) نحصل على : $K = \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}\right)$

أي : $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

التمرين ـ 8

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\,dx$ و $J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\,dx$

1 ـ أحسب I_0 و J_0

2 ـ نضع $n \geq 1$ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $\left.\begin{array}{l} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{array}\right\}$

3 ـ إستنتج عبارة I_n و J_n بدلالة n من أجل $n \geq 1$.

الحـل ـ 8

1 ـ $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

$J_0 = \int_0^{\pi/2} 1\cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

2 ـ ليكن $n \geq 1$

لنحسب $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\,dx$ بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \sin x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = -n\,e^{-nx} \\ v(x) = -\cos x \end{array}\right\}$

$$I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n e^{-nx}\cos x\, dx = 1 - n\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\, dx = 1 - n J_n$$

نتيجة : $I_n = 1 - n J_n$ منه : $I_n + n J_n = 1$ ..... (1)

لنحسب $J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\, dx$ بالتجزئة كما يلي :

نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \cos x \end{matrix}\right\}$ إذن $\left.\begin{matrix} u'(x) = -n e^{-nx} \\ v(x) = \sin x \end{matrix}\right\}$

منه : $J_n = [e^{-nx}\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -n e^{-nx}\sin x\, dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\, dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n I_n$

نتيجة : $J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n I_n$ منه : $-n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$ ..... (2)

خلاصة : $\left\{\begin{matrix} I_n + n J_n = 1 \text{ .... (1)} \\ -n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \text{ .... (2)} \end{matrix}\right.$

3 ـ نضرب طرفي المساواة (1) في n نحصل على : $n I_n + n^2 J_n = n$ .... (3)

نجمع المساوتين (3) و (2) طرف لطرف نحصل على : $n I_n + n^2 J_n - n I_n + J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$

أي : $(1 + n^2) J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$

منه : $J_n = \dfrac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}$

بتعويض J_n في المساواة (1) نحصل على : $I_n = 1 - n\left(\dfrac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}\right)$

أي : $I_n = 1 - \dfrac{n^2 + n e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}$

التمرين ـ 9

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN^* كما يلي : $\left\{\begin{matrix} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} : n \geq 2 \end{matrix}\right.$

و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل كل $n \geq 1$

1 ـ أحسب u_2 ؛ u_3 ؛ u_4

2 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

3 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\, dx \leq \dfrac{1}{k}$

4 ـ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \dfrac{1}{n}$ **و** $0 \leq v_n \leq 1$

5 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\, dx$

6 ـ إستنتج إتجاه تغير المتتالية (v_n)

7 ـ بين أن المتتالية (v_n) متقاربة نحو λ (لا يطلب تعيين λ)

8 ـ ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحـل ـ 9

ـ 1

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

2 ـ لنثبت بالتراجع على n صحة الخاصية $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ من أجل $n \geq 1$

من أجل $n = 1$: $u_1 = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1/1 = 1$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = 3/2$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ ؟

لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

منه : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$ لأن $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

أي : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

3 ــ لدينا : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$

لنعتبر الدالة $f : x \longmapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$ على المجال $[1 ; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{x^2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2(x+1)}$$

إذن : $f'(x) > 0$ على المجال $[1 ; +\infty[$

منه : f متزايدة تماما على $[1 ; +\infty[$

$f(1) = \ln 2 - \ln 1 - 1 = \ln 2 - 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 0$$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\ln 2 - 1$ ↗	0

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن :

من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $f(x) \leq 0$

أي من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \leq 0$

منه : من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

و خاصة $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ من أجل $k \in IN^*$

نعتبر الآن الدالة $g : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ على المجال $[1 ; +\infty[$

g قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

إذن : $g'(x) < 0$ من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$

منه : g متناقصة تماما على $[1 ; +\infty[$

$$g(1) = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	$\searrow$	0

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$

أي $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \geq 0$ منه $\ln(x+1) - \ln x \geq \frac{1}{x+1}$

و خاصة $\ln(k+1) - \ln k \geq \frac{1}{k+1}$ من أجل $k \in \mathbb{N}^*$

نتيجة : من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$ فإن : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

أي : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}$

4 ــ حسب السؤال (2) فإن من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

لنكتب هذه المساواة $(n-1)$ مرة $(k = 1 \ ;\ k = 2 \ ;\ \ldots\ldots\ldots\ k = n-1)$ كمايلي :

$k = 1$: $1/2 \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1/1$

$\oplus$

$k = 2$: $1/3 \leq \ln 3 - \ln 2 \leq 1/2$

$\oplus$

$k = 3$: $1/4 \leq \ln 4 - \ln 3 \leq 1/3$

$\oplus$

$k = n-1$: $\frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$

بجمع هذه المتباينات طرف لطرف نحصل على :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

أي : $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1 \leq \ln n \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n}$

أي : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

إذن : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ منه $-u_n + \frac{1}{n} \leq -\ln n \leq -u_n + 1$

أي $1/n \leq u_n - \ln n \leq 1$

و خاصة : $0 \leq u_n - \ln n \leq 1$ لأن $1/n \geq 0$

أي : $0 \leq v_n \leq 1$

5 ــ من أجل كل $n \in IN^*$:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - (u_n - \ln n)$$
$$= u_{n+1} - u_n - [\ln(n+1) - \ln n]$$
$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{لأن} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

6 ــ حسب السؤال (3) لدينا من أجل $n = k$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$$

أي :

$$\frac{-1}{n} \leq -\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{-1}{n+1}$$

منه :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

أي :

$$\frac{-1}{n(n+1)} \leq v_{n+1} - v_n \leq 0$$

و خاصة $v_{n+1} - v_n \leq 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة

7 ــ حسب السؤال (4) فإن $0 \leq v_n \leq 1$ إذن : (v_n) متتالية محدودة و خاصة فهي محدودة من الأسفل .

خلاصة : (v_n) متتالية متناقصة . (v_n) متتالية محدودة من الأسفل

إذن : (v_n) متتالية متقاربة و لتكن λ نهايتها .

8 ــ لدينا : $v_n = u_n - \ln n$ إذن : $u_n = v_n + \ln n$

منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n + \ln n$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lambda \in IR$

التمرين ــ 10

f دالة معرفة على $[0 ; 2]$ بــ $f(x) = (x-2)\,e^x$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم (C) على المجال $[0 ; 2]$

2 ــ (s) هو جزء المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل .

أحسب $A(s)$ مساحة الجزء (s) بتقريب 10^{-2} بالزيادة

بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل نولد مجسما حجمه v .

3 ــ أوجد الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c حيث تكون الدالة G المعرفة بــ $G(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)e^{2x}$ أصلية للدالة f^2 على IR .

4 ــ إستنتج قيمة الحجم v بتقريب 10^{-3} بالزيادة .

الحــل ــ 10

1 ــ تغيرات الدالة f على $[0 ; 2]$

f معرفة على IR و خاصة على $[0 ; 2]$: $f(0) = -2$ ؛ $f(2) = 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = e^x + (x-2)\,e^x = (x-1)\,e^x$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x - 1$ لأن $e^x > 0$ كمايلي :

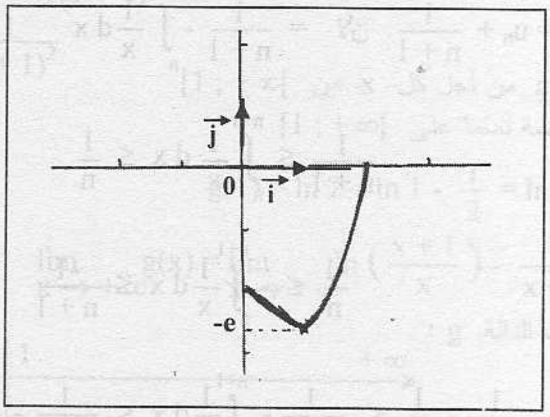
x	0		1		2
$x - 1$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	0

$f(1) = -e$

المنحنى :



2 ـــ حسب الشكل المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل على المجال [0 ; 2] إذن :

$$A(s) = -\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$= \int_2^0 (x-2)\,e^x\,dx$$

التكامل بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{aligned} u(x) &= x-2 \\ v'(x) &= e^x \end{aligned}\right\}$ إذن : $\left.\begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= e^x \end{aligned}\right\}$

منه :

$$A(s) = [(x-2)\,e^x]_2^0 - \int_2^0 e^x\,dx$$
$$= -2 - [e^x]_2^0$$
$$= -2 - (1 - e^2)$$
$$= e^2 - 3$$
$$\approx 4{,}39 \quad \text{(بالزيادة)}$$

3 ـــ من أجل كل x من IR لدينا :

$$G'(x) = (2ax + b)\,e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)\,e^{2x}$$
$$= (2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b)\,e^{2x}$$
$$= [2ax^2 + 2(a+b)x + 2c + b]\,e^{2x}$$

من جهة أخرى : $f^2(x) = (x-2)^2\,e^{2x} = (x^2 - 4x + 4)\,e^{2x}$

إذن تكون G دالة أصلية لـ f^2 إذا و فقط إذا كان :

$\left.\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2(a+b) &= -4 \\ 2c + b &= 4 \end{aligned}\right\}$ أي $\left.\begin{aligned} a &= 1/2 \\ a + b &= -2 \\ c &= \frac{4-b}{2} \end{aligned}\right\}$ أي $\left.\begin{aligned} a &= 1/2 \\ b &= -2 - \frac{1}{2} \\ c &= \frac{4-b}{2} \end{aligned}\right\}$ أي $\left.\begin{aligned} a &= 1/2 \\ b &= -5/2 \\ c &= 13/4 \end{aligned}\right\}$

نتيجة : $G(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$

تحقيق :

$$G'(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$$
$$= \left(x - \frac{5}{2} + x^2 - 5x + \frac{13}{2}\right)e^{2x}$$

$= (x^2 - 4x + 4)\, e^{2x}$

$= [f(x)]^2$

4 –

$$v = \pi \int_0^2 f^2(x)\, dx$$
$$= \pi [G(x)]_0^2$$
$$= \pi\left[\left(\frac{4}{2} - \frac{10}{2} + \frac{13}{4}\right) e^4 - \left(\frac{13}{4}\right)\right]$$
$$= \pi\left[\frac{1}{4} e^4 - \frac{13}{4}\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}(e^4 - 13)$$
$$\approx 32{,}671 \quad \text{بالزيادة}$$

ملاحظة : هذه القيم مقدرة بوحدة القياس .

التمرين – 11

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 e^{1-x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ الوحدة 2 cm

1 – عين نهاية الدالة f عند: $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم فسر النتائج هندسيا .

2 – أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى (C)

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعرف التكامل I_n بـ $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$

3 – عين علاقة بين I_n و I_{n+1}

4 – أحسب I_1 و I_2

5 – أعط تفسيرا هندسيا لـ I_2

6 – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال [0 ; 1] و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$

7 – إستنتج حصرا لـ I_n ثم نهاية I_n لما n يؤول إلى $+\infty$

الحـل – 11

1 –

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\}$$

لنحسب إذن :
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x\, e^{1-x} = -\infty$$

التفسير الهندسي : المنحنى (C) يقبل فرعا من قطع مكافئ في إتجاه محور التراتيب عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e}{e^x} = 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

2 – تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x\, e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2 - x)\, e^{1-x}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(2-x)$ لأن $e^{1-x} > 0$ كما يلي :

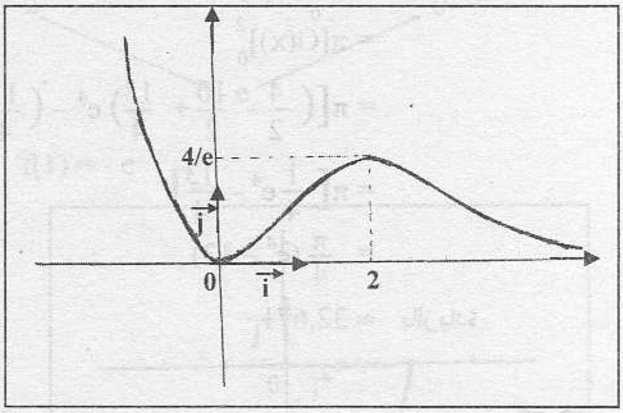
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(2-x)$		-	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4/e$	↘	0

$f(0) = 0$
$f(2) = 4/e$

الإنشاء :



3 ـ $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ إذن : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\,dx$

لنحسب I_{n+1} بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{1-x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = (n+1)\,x^n \\ v(x) = -\,e^{1-x} \end{array}\right\}$

منه :

$$I_{n+1} = [-\,x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -\,(n+1)\,x^n e^{1-x}\,dx$$
$$= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$
$$= -1 + (n+1)\,I_n$$

نتيجة : $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1$

4 ـ $I_1 = \int_0^1 x\,e^{1-x}\,dx$ (بالتجزئة) :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\,e^{1-x} \end{array}\right\}$

إذن :

$$I_1 = [-\,x\,e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -\,e^{1-x}\,dx$$
$$= -1 - [e^{1-x}]_0^1$$
$$= -1 - (1 - e)$$
$$= e - 2$$

منه : $I_2 = 2\,I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$

5 ـ $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

بما أن الدالة f موجبة على المجال $[0\,;1]$ فإن $\int_0^1 f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 1$

إذن : I_2 هي هذه المساحة مقدرة بـ $4\ cm^2$

6 ـ ليكن $x \in [0\,;1]$ و $n \in IN^*$

$$x^n e^{1-x} - x^n e = x^n e(e^{-x} - 1)$$
$$= x^n e\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)$$
$$= \frac{x^n e}{e^x}(1 - e^x)$$ من إشارة $1 - e^x$ كمايلي :

$0 \le x \le 1$ إذن : $1 \le e^x \le e$

منه : $-\,e \le -\,e^x \le -1$

أي $\quad 1-e \le 1-e^x \le 0$

و خصة $\quad 1-e^x \le 0$ منه : $\quad \frac{x^n e}{e^x}(1-e^x) \le 0$

أي : $\quad x^n e^{1-x} - x^n e \le 0 \quad$ ....(1)

من جهة أخرى : $\quad x^n e^{1-x} - x^n = x^n(e^{1-x}-1)$ من إشارة $e^{1-x}-1$

إذن : $0 \le x \le 1 \quad$: $-1 \le -x \le 0$

منه : $\quad 0 \le 1-x \le 1$

إذن : $\quad 1 \le e^{1-x} \le e$

منه : $\quad 0 \le e^{1-x}-1 \le e-1$

و خاصة $\quad e^{1-x}-1 \ge 0$ إذن : $\quad x^n(e^{1-x}-1) \ge 0$

أي $\quad x^n e^{1-x} \ge x^n \quad$ ......(2)

من العلاقتين (2) و (1) : $\quad x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$

7 ـ لدينا : $\quad x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$ إذن : $\quad \int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \le \int_0^1 x^n e\,dx$

أي : $\quad \int_0^1 x^n\,dx \le I_n \le e\int_0^1 x^n\,dx$

أي : $\quad \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

أي : $\quad \frac{1}{n+1} - 0 \le I_n \le e\left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$

أي : $\quad \frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$

منه : $\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le \lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}$

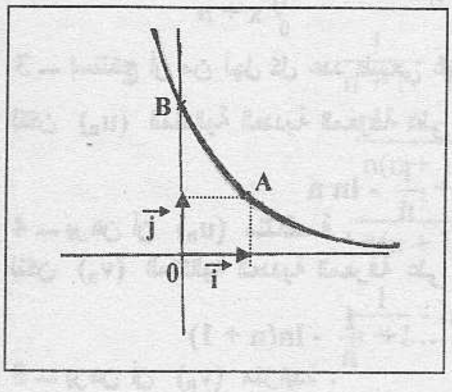
أي : $\quad 0 \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le 0$

إذن : $\quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

__التمرين ــ 12__

لتكن f الدالة العددية القابلة للاشتقاق على IR حيث f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ و تحقق $f(0) = e$.

إليك منحنى الدالة f في الشكل المقابل



1 ـ عين عبارة $f(x)$

ليكن t عدد حقيقي من المجال $[1 ; e]$

2 ـ حل في R المعادلة $e^{1-x} = t$ ذات المجهول x .

لتكن A و B نقطتان من منحنى الدالة f فواصلهما على الترتيب 1 و 0 .

نعتبر المجسم المحصل بدوران قوس المنحنى $\overset{\frown}{AB}$ حول محور التراتيب

نرمز بـ v إلى حجم هذا المجسم . و نقبل أن $v = \pi\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt$

3 ـ أحسب v بالتكامل بالتجزئة

__الحـل ــ 12__

1 ـ تعيين $f(x)$:

$$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$$

$$c \in IR^* \text{ حيث } \Rightarrow y = c\,e^{-x}$$

إذن : $\quad f(x) = c\,e^{-x}$

منه : $\quad f(0) = c$ أي $c = e$

نتيجة : $\quad f(x) = e \cdot e^{-x}$ أي $f(x) = e^{1-x}$ و هي عبارة $f(x)$

2 ـ $1 \le t \le e$: $\quad e^{1-x} = t \Rightarrow 1 - x = \ln t$

$\Rightarrow x = 1 - \ln t$ و هو الحل المطلوب .

3 ـ $\quad v = \pi\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt$

$$= \pi \int_1^e 1 - 2\ln t + (\ln t)^2 \, dt$$

$$= \pi \int_1^e 1\, dt - 2\pi \int_1^e \ln t \, dt + \pi \int_1^e (\ln t)^2 \, dt$$

$$= \pi [t]_1^e - 2\pi [t \ln t - t]_1^e + \pi \int_1^e (\ln t)^2 \, dt$$

$$= \pi(e-1) - 2\pi(e - e + 1) + \pi \int_1^e (\ln t)^2 \, dt$$

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \pi(e-3) + \pi \int_1^e (\ln t)^2 \, dt$$

لنحسب $\int_1^e (\ln t)^2 \, dt$ بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = (\ln t)^2 \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \frac{2}{t}\ln t \\ v(t) = t \end{array}\right\}$

إذن :

$$\int_1^e (\ln t)^2 \, dt = [t(\ln t)^2]_1^e - \int_1^e 2\ln t \, dt$$

$$= e - 0 - 2\int_1^e \ln t \, dt$$

$$= e - 2[t\ln t - t]_1^e$$

$$= e - 2(e - e + 1)$$

$$= e - 2$$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على : $v = \pi(e-3) + \pi(e-2)$

$$= \pi(2e - 5)$$

ملاحظة : هذا الحجم مقدر بوحدة القياس .

التمرين – 13

1 – بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال [0 ; 1] فإن :

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \le \frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n}$$

2 – أحسب $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$

3 – إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN^* بـ :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

4 – برهن أن (u_n) متناقصة .

لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على IN^* بـ :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

5 – برهن أن (v_n) متزايدة .

6 – برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ (لا يطلب تعيين ℓ) .

الحـل – 13

1 – ليكن $x \in [0 ; 1]$ و $n \in IN^*$

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{n - x - n}{n(x+n)} = \frac{-x}{n(x+n)}$$

بما أن $x \ge 0$ فإن $-x \le 0$ إذن : $\frac{-x}{n(x+n)} \le 0$ أي $\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \le 0$

منه : $\frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n} \ldots\ldots\ldots (1)$

$$\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} + \frac{x}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - n(x+n) + x(x+n)}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{n^2 - nx - n^2 + x^2 + nx}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{x^2}{n^2(x+n)}$$

إذن : $\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right) \geq 0$ منه : $\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$ ………. (2)

نتيجة : من (1) و (2) : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

2 ــ $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

3 ــ لدينا : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

إذن : $\int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\,dx$

أي : $\frac{1}{n}\left[x\right]_0^1 - \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left[x\right]_0^1$

أي : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ و هو المطلوب

4 ــ $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

لكن $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ إذن : $-\frac{1}{n} \leq -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$

منه : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$

أي $\frac{n-n-1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{2n^2 + n + 1 - 2n(n+1)}{2n^2(n+1)}$

أي $\frac{-1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1-n}{2n^2(n+1)}$

بما أن $\frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leq 0$ و $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$ فإن $\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$

أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ منه المتتالية (u_n) متناقصة

5 ــ $v_n - v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n\right)$

$$= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

بما أن $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ فإن $\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 0$

أي $v_n - v_{n-1} \geq 0$ منه المتتالية (v_n) متزايدة .

6 ـ
$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$$
$$= -\ln n + \ln(n+1)$$
$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

منه :
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

نتيجة : (u_n) متناقصة ، (v_n) متزايدة ، $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن : فهما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ

التمرين ـ 14

f و g دالتان معرفتان على IR كمايلي : $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

نسمي (C_f) و (C_g) منحناهما على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أدرس شفعية الدالتين f و g .

2 ـ أدرس تغيرات الدالتين f و g على $[0 ; +\infty[$ ثم إستنتج جدولي تغيراتهما على IR .

3 ـ أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g) ثم أنشأهما .

لتكن G الدالة المعرفة على R بـ $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

4 ـ ماذا تمثل الدالة G بالنسبة إلى الدالة g ؟

5 ـ أعط تفسيرا هندسيا لـ $G(x)$ من أجل $x > 0$

6 ـ أدرس تغيرات الدالة G على IR (لا يطلب حساب النهايات)

لتكن F الدالة المعرفة على IR بـ $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

7 ـ بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x : $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x e^{-x^2}]$

نقبل أن الدالة F تقبل نهاية منتهية h عند $+\infty$

8 ـ بين أن الدالة G تقبل نهاية منتهية عند $+\infty$ يطلب تعيينها .

9 ـ فسر هندسيا العدد N حيث $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt$

الحـل ـ 14

1 ـ من أجل كل x من IR فان $(-x) \in IR$ و :
$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$
$$g(-x) = (-x)^2 e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$$

نتيجة : الدالتين f و g زوجيتان

2 ـ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$:

$$f(0) = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$
$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

إذن : $f'(x) \le 0$ على المجال $[0 ; +\infty[$ لأن $-2x \le 0$

أي : f متناقصة على $[0 ; +\infty[$

بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نحصل على جدول تغيرات الدالة f على IR كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

تغيرات الدالة g على $]0\,;+\infty[$:

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$$g'(x) = 2x\,e^{-x^2} - 2x^3\,e^{-x^2} = (1 - x^2)\,2x\,e^{-x^2}$$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x(1 - x^2)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x^2$		+	0	-	
$x(1 - x^2)$	0	+	0	-	

بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نحصل على جدول تغيرات الدالة g على IR كمايلي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$g(x)$	0	↗	$1/e$	↘	0	↗	$1/e$	↘	0

$$g(-1) = g(1) = e^{-1} = 1/e$$

3 ـ الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g)

$$f(x) - g(x) = e^{-x^2} - x^2\,e^{-x^2} = (1 - x^2)\,e^{-x^2}$$

إذن : إشارة $f(x) - g(x)$ هي إشارة $1 - x^2$ كما يلي :

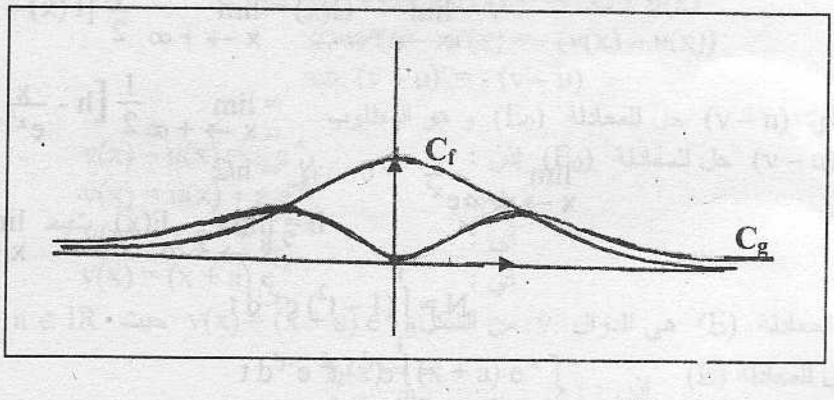
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		-	0	+	0	-	

خلاصة : لما $x \in]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$: (C_f) يقع تحت (C_g)

لما $x \in \{-1\,;1\}$: (C_f) يقطع (C_g)

لما $x \in]-1\,;1[$: (C_f) يقع فوق (C_g)

الإنشاء :



4 ـ $$G(x) = \int_0^x t^2\,e^{-t^2}\,dt = \int_0^x g(t)\,dt$$

إذن : G هي الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 أي $\begin{cases} G'(x) = g(x) \\ G(0) = 0 \end{cases}$

5 ـ من أجل $x > 0$ فإن العدد $G(x)$ يمثل مساحة حيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_g) و محور الفواصل على المجال $[0\,;x]$ لأن المنحنى يقع فوق محور الفواصل

6 ـ تغيرات الدالة G على IR : $G'(x) = g(x)$

إذن : إشارة $G'(x)$ هي إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة G :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$+$	
$G(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$

7 — $$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$$

إذن : F هي دالة أصلية للدالة f و التي تنعدم عند 0 أي $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 0 \end{cases}$

لتكن ϕ الدالة المعرفة على IR بـ $\phi(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x\, e^{-x^2}]$

لدينا ϕ قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}[f(x) - e^{-x^2} + 2\,x^2\, e^{-x^2}]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{-x^2} - e^{-x^2} + 2\,x^2\, e^{-x^2}]$$
$$= x^2\, e^{-x^2}$$
$$= g(x)$$

إذن : ϕ هي دالة أصلية للدالة g .

من جهة أخرى : $$\phi(0) = \frac{1}{2}[F(0) - 0\, e^{-0}] = \frac{1}{2}(0) = 0$$

نتيجة : $\begin{cases} \phi'(x) = g(x) \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$ إذن : ϕ هي الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0

إذن : $\phi = G$ أي : $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x\, e^{-x^2}]$

8 — نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = h$ حيث $h \in IR$

لدينا : $$G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x\, e^{-x^2}]$$

إذن : $$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}[F(x) - x\, e^{-x^2}]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[h - \frac{x}{e^{x^2}}\right]$$
$$= h/2$$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = h/2$ حيث $h = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

9 — $$N = \int_0^1 (1 - t^2)\, e^{-t^2}\, dt$$
$$= \int_0^1 e^{-t^2} - t^2\, e^{-t^2} dt$$
$$= \int_0^1 f(t) - g(t)\, dt$$

بما أن المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g) على المجال $[0 ; 1]$ فإن العدد $N = \int_0^1 f(t) - g(t)\, dt$ يمثل مساحة حيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المنحنى (C_g) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 1$

التمرين — 15

الجزء I : لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$ ....(E)

1 — بين أن الدالة u المعرفة على IR بـ $u(x) = x\, e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2 — حل في IR المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ ....(E_0)

3 — بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على IR تكون حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت v - u

حلا للمعادلة (E_0)

4 ـ إستنتج جميع حلول المعادلة (E)

5 ـ عين الدالة f_2 حل المعادلة (E) و التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x = 0$

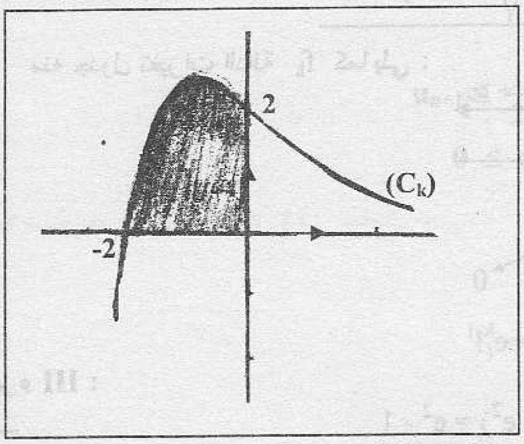
الجزء II : k عدد حقيقي معطى . نرمز بـ f_k إلى الدالة المعرفة على IR كمايلي : $f_k(x) = (x + k)\, e^{-x}$ و نرمز بـ (C_k) إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ عين نهايات الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$

2 ـ أدرس تغيرات الدالة f_k

الجزء III : نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بـ $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\, dx$$



1 ـ أحسب I_0

2 ـ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n + 1)\, I_n$$

3 ـ إستنتج قيم I_1 و I_2

4 ـ التمثيل البياني المقابل هو للدالة f_k المعرفة في الجزء II .
باستعمال قراءة بيانية عين قيمة k المرفقة بالمنحنى (C_k)

5 ـ لتكن S مساحة الجزء الملون . عبر عن S
بدلالة I_0 و I_1 ثم إستنتج قيمته .

الحـل ـ 15

الجزء I

1 ـ u قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $u'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x}$

منه : $u'(x) + u(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} + x\, e^{-x} = e^{-x}$

إذن : u هي فعلا حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$ ....(E)

2 ـ $y' + y = 0$ إذن : $y' = -y$

منه حلول المعادلة (E_0) هي الدوال f من الشكل $f(x) = a\, e^{-x}$ حيث $a \in IR$

3 ـ لتكن v حلا للمعادلة (E) إذن : $v'(x) + v(x) = e^{-x}$

لكن $u'(x) + u(x) = e^{-x}$

إذن

$$\begin{aligned} v'(x) + v(x) = e^{-x} &\Leftrightarrow v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x) \\ &\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) = -v(x) + u(x) \\ &\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) = -(v(x) - u(x)) \\ &\Leftrightarrow (v - u)' = -(v - u) \end{aligned}$$

أي $(v - u)$ حل للمعادلة (E_0) و هو المطلوب

4 ـ نتيجة : $(v - u)$ حل للمعادلة (E_0) إذن : $v(x) - u(x) = a\, e^{-x}$

منه : $v(x) = u(x) + a\, e^{-x}$

أي : $v(x) = x\, e^{-x} + a\, e^{-x}$

أي : $v(x) = (x + a)\, e^{-x}$

خلاصة : حلول المعادلة (E) هي الدوال v من الشكل $v(x) = (x + a)\, e^{-x}$ حيث $a \in IR$

5 ـ $\left.\begin{array}{l} f_2 \text{ حل للمعادلة } (E) \\ f_2(0) = 2 \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} f_2(x) = (x + a)\, e^{-x} \\ f_2(0) = 2 \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} f_2(x) = (x + a)\, e^{-x} \\ a\, e^{0} = 2 \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} f_2(x) = (x + a)\, e^{-x} \\ a = 2 \end{array}\right.$

منه : $f_2(x) = (x + 2)\, e^{-x}$

الجزء II :

1 ـ

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + k)\, e^{-x} = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \to -\infty} (x + k) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + k)\, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} x\, e^{-x} + k\, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} + k\, e^{-x} = 0$$

(لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} k\, e^{-x} = 0$)

2 ـ f_k قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f_k'(x) = e^{-x} - (x + k)\, e^{-x} = (1 - k - x)\, e^{-x}$

إذن : إشارة $f_k'(x)$ هي إشارة $(1 - k - x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي:

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$1-k-x$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f_k كما يلي :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	↗	e^{k-1}	↘	0

$$f_k(1 - k) = (1 - k + k)\, e^{-(1-k)} = e^{k-1}$$

الجزء III :

1 ـ $$I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx = [- e^{-x}]_{-2}^{0} = -1 - (- e^2) = e^2 - 1$$

2 ـ $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1}\, e^{-x}\, dx$ لنحسب هذا التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = (n+1)\, x^n \\ v(x) = - e^{-x} \end{array}\right.$

منه :
$$I_{n+1} = [- x^{n+1}\, e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} - (n+1)\, x^n\, e^{-x}\, dx$$
$$= 0 - (- (-2)^{n+1}\, e^2) + (n+1) \int_{-2}^{0} x^n\, e^{-x}\, dx$$
$$= (-2)^{n+1}\, e^2 + (n+1)\, I_n$$

نتيجة : من أجل $n \geq 0$: $I_{n+1} = (-2)^{n+1}\, e^2 + (n+1)\, I_n$

3 ـ حسب النتيجة السابقة :
$$I_1 = (-2)^1\, e^2 + I_0 = -2\, e^2 + e^2 - 1 = - e^2 - 1$$
$$I_2 = (-2)^2\, e^2 + 2\, I_1 = 4\, e^2 + 2(- e^2 - 1) = 2\, e^2 - 2$$

4 ـ حسب المنحنى الممثل للدالة f_k فإن النقطة A ذات الإحداثيات $(0 ; 2)$ تنتمي إلى المنحنى

إذن : $f_k(0) = 2$ أي $(0 + k)\, e^0 = 2$ منه $k = 2$

نتيجة : المنحنى ممثل للدالة f_2 حيث $f_2(x) = (x + 2)\, e^{-x}$ (أي $k = 2$)

5 ـ منحنى الدالة f_2 يقع فوق محور الفواصل على المجال $[-2 ; 0]$ إذن عبارة المساحة S هي كمايلي :

$$S = \int_{-2}^{0} f_2(x)\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (x + 2)\, e^{-x}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x\, e^{-x} + 2\, e^{-x}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx + 2 \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx$$

$= I_1 + 2\, I_0$ و هو المطلوب

نتيجة :
$$S = I_1 + 2\, I_0$$
$$= - e^2 - 1 + 2(e^2 - 1)$$
$$= e^2 - 3$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة القياس .

التمرين ــ 16

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$

1 ــ أحسب I_1

2 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \le I_n \le \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$

3 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$: $u_n = \frac{2^n}{n!}$

5 ــ أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثم تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 3$: $u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

6 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 3$: $0 \le u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

7 ــ إستنتج نهاية المتتالية (u_n) ثم نهاية المتتالية (I_n)

8 ــ بين أن $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$

الحــل ــ 16

ـــ 1

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{1!}(2-x)^1 e^x \, dx$$

$$= \int_0^2 (2-x) e^x \, dx$$

بالتجزئة : نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = 2 - x \\ v'(x) = e^x \end{matrix}\right\}$ إذن $\left.\begin{matrix} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{matrix}\right\}$

منه :

$$I_1 = [(2-x) e^x]_0^2 - \int_0^2 - e^x \, dx$$

$$= 0 - 2 + [e^x]_0^2$$

$$= -2 + e^2 - 1$$

$$= e^2 - 3$$

2 ــ $0 \le x \le 2$ إذن : $\left.\begin{matrix} e^0 \le e^x \le e^2 \\ -2 \le -x \le 0 \end{matrix}\right\}$

منه : $\left.\begin{matrix} 1 \le e^x \le e^2 \\ 0 \le 2 - x \le 2 \end{matrix}\right\}$

منه : $\left.\begin{matrix} 1 \le e^x \le e^2 \\ 0 \le (2-x)^n \le 2^n \end{matrix}\right\}$

منه : $0 \le (2-x)^n e^x \le 2^n e^2$ (جداء المتباينتين)

منه : $0 \le \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \le \frac{2^n}{n!} e^2$

إذن : $0 \le \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx \le \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^2 \, dx$

أي : $0 \le I_n \le \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^2 \, dx$

أي : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!} e^2 [x]_0^2$

أي : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!} e^2 (2)$

منه : $0 \le I_n \le \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$ و هو المطلوب

3 ــ $$I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1} e^x \, dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x \, dx \;......\; (1)$$ لنحسب $\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x \, dx$ بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = (2-x)^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

منه : $$\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x \, dx = [(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 -(n+1)(2-x)^n e^x \, dx$$

$$= -(2)^{n+1} + (n+1)\int_0^2 (2-x)^n e^x \, dx$$

$$= -2^{n+1} + n!(n+1)\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$$

$$= -2^{n+1} + (n+1)!\, I_n$$

نتيجة : بالرجوع إلى المساواة (1) نحصل على :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(-2^{n+1} + (n+1)!\, I_n)$$

أي : $$I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} I_n$$

أي : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ و هو المطلوب

4 ــ لتكن الخاصية : $$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$

لنثبت صحتها بالتراجع من أجل كل $n \geq 1$

من أجل $n = 1$: $1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 1 + 2 + e^2 - 3 = e^2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$ من أجل $n > 1$

هل $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2$ ؟

لدينا : $$\underbrace{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!}}_{e^2 - I_n \text{ حسب فرضية التراجع}} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2 - I_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$= e^2 - I_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$= e^2$ إذن : الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN^*$: $$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$$

5 ــ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

نتيجة : $n \geq 3$ إذن : $n + 1 \geq 4$ منه $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{4}$

أي $$\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ منه : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ و هو المطلوب (لأن $u_n > 0$)

6 ــ لنثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 3$: $u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من أجل $n = 3$ لدينا : $u_3 \leq u_3$ أي $u_3 \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ منه الخاصية محققة .

نفرض أن $u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ من أجل $n > 3$

هل $u_{n+1} \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من جهة أخرى : $u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

إذن : $u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

أي $u_{n+1} \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل $n \ge 3$: $u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من جهة أخرى : $u_n = \frac{2^n}{n!}$ إذن : $u_n \ge 0$ لأن $2^n > 0$ و $n! > 0$

خلاصة : من أجل كل $n \ge 3$: $0 \le u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

7 ــ لدينا : $0 \le u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ من أجل $n \ge 3$

و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (حسب الحصر)

حسب السؤال (2) لدينا : $0 \le I_n \le \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$

أي : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}(2e^2)$

أي : $0 \le I_n \le 2e^2 u_n$

لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} 2e^2 u_n = 0$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ إذن : حسب الحصر فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

8 ــ لدينا : من أجل $n \ge 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

من أجل n يؤول إلى $+\infty$ نحصل على :

$$e^2 = \lim_{n \to +\infty}\left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!} + I_n\right]$$

أي : $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty}\left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!}\right]$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$

التمرين ــ 17

من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k \ge 0$ نعتبر الدالة f_k المعرفة على IR بـ $f_k(x) = \frac{1 - k e^x}{1 + k e^x} + x$

1 ــ بين أن الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية $2y' = (y - x)^2 + 1$ .... (E)

2 ــ إستنتج إتجاه تغير الدالة f_k

نرمز بـ (C_k) إلى منحنى الدالة f_k في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

في الشكل المقابل رسمنا المستقيمين (d) و (d') اللذين معادلاتهما على الترتيب $y = x - 1$ و $y = x + 1$ و ثلاث منحنيات للدالة f_k مرفقة لقيم مختلفة لـ k

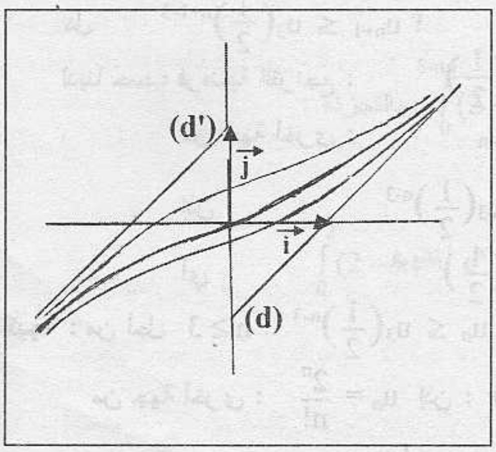
3 ــ عين العدد الحقيقي k المرفق بالمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ 0 ثم العدد k المرفق بالمنحنى (C') الذي يشمل النقطة $A(1 ; 1)$

4 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k e^x}$ .... (1)

و $f_k(x) = x + 1 - \frac{2 k e^x}{1 + k e^x}$ .... (2)

5 ــ من أجل $k > 0$ إستنتج ما يلي :

أ ــ وضعية المنحنى (C_k) بالنسبة إلى المستقيمين (d) و (d')



ب ـ معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_k) .

ليكن $k = 1$

6 ـ بين أن f_1 دالة فردية .

لتكن F الدالة المعرفة على IR بـ $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$

7 ـ فسر هندسيا العدد $F(x)$ في الحالتين $x > 0$ و $x < 0$

ثم استنتج شفعية الدالة F

8 ـ شكل جدول تغيرات الدالة F على IR

(لا يطلب حساب النهايات) .

9 ـ أحسب $F(x)$ مستعملا الشكل الأنسب لـ $f_1(x)$

الحـل ـ 17

1 ـ من أجل كل x من IR :

$$f_k'(x) = \frac{-k e^x(1 + k e^x) - k e^x(1 - k e^x)}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-k e^x - k^2 e^{2x} - k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-2 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

منه : $2 f_k'(x) = \frac{-4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 2 \ldots\ldots\ldots\ (1)$

من جهة أخرى :

$$(f_k(x) - x)^2 + 1 = \left(\frac{1 - k e^x}{1 + k e^x}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{1 - 2 k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{1 - 2 k e^x + k^2 e^{2x} + 2 k e^x - 2 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{1 + 2 k e^x + k^2 e^{2x} - 4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{(1 + k e^x)^2 - 4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= 1 - \frac{4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 2 \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $2 f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$

أي : الدالة f_k حل للمعادلة $2y' = (y - x)^2 + 1 \ldots\ldots\ (E)$

2 ـ حسب السؤال (1) : $2 f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$ إذن : $f_k'(x) = \frac{1}{2}\left[(f_k(x) - x)^2 + 1\right]$

منه : $f_k'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

إذن : f_k متزايدة تماما على IR كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_k(x)$	↗

3 ــ المنحنى (C) يشمل الا بدأ 0 إذن : $f_k(0) = 0$

منه : $\frac{1-k}{1+k} + 0 = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0$

$\Leftrightarrow k = 1$

المنحنى (C') يشمل النقطة $A(1 ; 1)$ إذن : $f_k(1) = 1$

منه : $\frac{1-ke}{1+ke} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1-ke}{1+ke} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - ke = 0$

$\Leftrightarrow k = 1/e$

4 ــ من أجل كل x من IR فإن :

$$x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} = x + \frac{-1-ke^x+2}{1+ke^x} = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = f_k(x)$$

$$x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{1+ke^x-2ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = f_k(x)$$

5 ــ ليكن $k > 0$

أ ــ وضعية (C_k) بالنسبة لـ (d) و (d')

$$f_k(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} - (x-1) = \frac{2}{1+ke^x} > 0$$

إذن : المنحنى (C_k) فوق المستقيم (d)

$$f_k(x) - (x+1) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} - (x+1) = \frac{-2ke^x}{1+ke^x} < 0$$

إذن : المنحنى (C_k) تحت المستقيم (d')

ب ــ معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_k) :

$$\lim_{x \to -\infty} [f_k(x) - (x+1)] = \lim_{x \to -\infty} \left[x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} - (x+1)\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2ke^x}{1+ke^x} = 0$$

إذن : المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_k) في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f_k(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} - (x-1)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+ke^x} = 0$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_k) في جوار $+\infty$

6 ــ $k = 1$: $f_1(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} + x$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و :

$$f_1(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} - x = \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} - x = \frac{e^x-1}{e^x+1} - x = \frac{-(1-e^x)}{(1+e^x)} - x = -\left(\frac{1-e^x}{1+e^x} + x\right) = -f_1(x)$$

إذن : f_1 دالة فردية .

7 ــ $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-e^t}{1+e^t} + t\,dt$

بملاحظة منحنى الدالة f_1 على الشكل (يشمل المبدأ 0) . نستنتج مايلي :

من أجل $x > 0$: المنحنى فوق محور الفواصل .

من أجل $x < 0$: المنحنى تحت محور الفواصل .

نتيجة : نسمي S مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f_1 و محور الفواصل على المجال $[0 ; x]$ حيث $x > 0$

و نسمي S' مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f_1 و محور الفواصل على المجال $[x ; 0]$ حيث $x < 0$

إذن لدينا النتائج التالية :

إذا كان $x > 0$ فإن : $\int_0^x f_1(t)\,dt = S$ لأن المنحنى فوق محور الفواصل .

إذا كان $x < 0$ فإن : $\int_0^x f_1(t)\,dt = -\int_x^0 f_1(t)\,dt$ (حسب خواص التكامل)

$$= \int_x^0 - f_1(t)\, d t$$

$= S'$ لأن المنحنى تحت محور الفواصل .

خلاصة : العدد $\int_0^x f_1(t)\, d t$ هو مساحة الجزء من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال $[0 ; |x|]$ لأن الدالة f_1 فردية

نتيجة : $F(x) - F(-x) = \int_0^x f_1(t)\, d t - \int_0^{-x} f_1(t)\, d t$

$= 0$ منه $F(-x) = F(x)$

إذن : F دالة زوجية

8 ــ $F(x) = \int_0^x f_1(t)\, d t$ إذن : F هي الدالة الأصلية لــ f_1 و التي تنعدم عند 0

منه $F'(x) = f_1(x)$ إذن : إشارة $F'(x)$ هي إشارة $f_1(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x) = f_1(x)$ (حسب المنحنى)		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة F :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

9 ــ حساب $F(x)$:

$$F(x) = \int_0^x f_1(t)\, d t$$

$$= \int_0^x \frac{1 - e^t}{1 + e^t} + t\, d t$$

$$= \int_0^x t + 1 - \frac{2\, e^t}{1 + e^t}\, d t$$ حسب السؤال (4) .

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + t - 2\ln(1 + e^t) \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln(1 + e^x) + 2\ln 2$$

نتيجة : عبارة $F(x)$ هي : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln(1 + e^x) + \ln 4$

تحقيق : $F'(x) = x + 1 - \frac{2\, e^x}{1 + e^x} = x + \frac{1 + e^x - 2\, e^x}{1 + e^x} = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = f_1(x)$

$F(0) = 0 - 2\ln(2) + \ln 4 = -\ln 4 + \ln 4 = 0$

التمرين ــ 18

نعتبر الدوال f_n المعرفة على المجال $[0 ; 1]$ بــ $f_0(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x + x^2}$$

نضع $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, d x$

الجزء I

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f_0 ثم أرسم منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ حيث وحدة القياس $6\ cm$ محددا المماسات عند النقط ذات الفواصل 0 و 1

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; 1]$ نضع $f(x) = -f_0'(x)$

2 ــ أحسب الدالة المشتقة للدالة f ثم بين أن f متناقصة على المجال $[0 ; 1]$

3 – إستنتج أن من أجل كل x من المجال $[0 ; 1]$: $1/3 \le f(x) \le 1$

الجزء II

1 – أحسب $I_0 + I_1 + I_2$ ثم $I_0 + 2 I_1$

2 – أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[0 ; 1]$

3 – إستنتج إتجاه تغير المتتالية (I_n)

4 – برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل $x \in [0 ; 1]$: $0 \le f_n(x) \le x^n$

5 – إستنتج أن : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

6 – عين نهاية المتتالية (I_n)

7 – باستعمال التكامل بالتجزئة برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx$$

8 – باستعمال حصر العدد $f(x)$ في الجزء I بين أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \frac{1}{n+2}$$

9 – بين أن :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

10 – إبتداءا من أي عدد طبيعي n_0 يكون هذا الحصر يقترب بالزيادة إلى 0,01 من I_n

11 – عين قيمة مقربة إلى 0,01 بالزيادة لـ I_n من أجل $n = n_0$

الحـل – 18

الجزء I

1 – تغيرات الدالة f_0 على المجال $[0 ;1]$:

$f_0(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$ إذن : $f_0(0) = 1$ و $f_0(1) = 1/3$

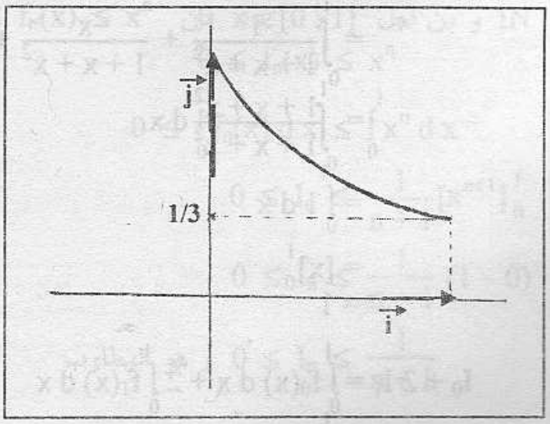
f_0 قابلة للاشتقاق على $[0 ; 1]$ و : $f_0'(x) = \frac{-2x - 1}{(1 + x + x^2)^2} = \frac{-(2x + 1)}{(1 + x + x^2)^2}$

منه : $f_0'(x) < 0$ على المجال $[0 ; 1]$ لأن $-(2x + 1) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f_0 :

x	0		1
$f_0'(x)$		$-$	
$f_0(x)$	1	$\searrow$	$1/3$

الإنشاء :



المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $f_0(0) = 1$ ؛ $f_0'(0) = -1$

إذن : المماس له المعادلة $y = -x + 1$

المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 : $f_0(1) = 1/3$ ؛ $f_0'(1) = -3/9 = -1/3$

إذن : المماس له المعادلة $y = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}$ أي $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

2 ـ $f(x) = -f_0'(x)$ إذن : $f(x) = \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

إذن :

$$f'(x) = \frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)(1+x+x^2)(2x+1)}{(1+x+x^2)^4}$$

$$= \frac{1+x+x^2}{(1+x+x^2)^4}\left[2(1+x+x^2) - 2(2x+1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(1+x+x^2)^3}(2 + 2x + 2x^2 - 8x^2 - 8x - 2)$$

$$= \frac{-6x^2 - 6x}{(1+x+x^2)^3}$$

$$= \frac{-6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$$

على المجال $[0 ; 1]$ لدينا $x + 1 \geq 0$ و $-6x \leq 0$ إذن $\frac{-6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$

إذن : الدالة f متناقصة على المجال $[0 ; 1]$

3 ـ f متناقصة على المجال $[0 ; 1]$ إذن جدول تغيراتها كما يلي :

x	0		1
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/3$

$$f(0) = -f_0'(0) = -(-1) = 1$$

$$f(1) = -f_0'(1) = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من $[0 ; 1]$: $1/3 \leq f(x) \leq 1$

الجزء II

1 ـ

$$I_0 + I_1 + I_2 = \int_0^1 f_0(x)\,dx + \int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_0^1 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{x}{1+x+x^2} + \frac{x^2}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx$$

$$= [x]_0^1$$

$$= 1$$

$$I_0 + 2I_1 = \int_0^1 f_0(x)\,dx + 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f_0(x) + 2f_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{2x}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= [\ln(1+x+x^2)]_0^1$$
$$= \ln 3 - \ln 1$$
$$= \ln 3$$

2 ـــ إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

الحالة الأولى : من أجل $n = 0$

$$f_1(x) - f_0(x) = \frac{x}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{x-1}{1+x+x^2}$$

إذن : $f_1(x) - f_0(x) \le 0$ لأن على المجال $[0 ; 1]$ فإن $x - 1 \le 0$ و $1 + x + x^2 > 0$

الحالة الثانية : من أجل $n > 0$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} - \frac{x^n}{1+x+x^2} = \frac{x^n}{1+x+x^2}(x-1)$$

إذن : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \le 0$ لأن على المجال $[0 ; 1]$ فإن $x - 1 \le 0$ و $x^n \ge 0$ و $1 + x + x^2 > 0$

خلاصة : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $f_{n+1}(x) - f_n(x) \le 0$

3 ـــ حسب السؤال السابق فإن على المجال $[0 ; 1]$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) \le 0$

أي $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$

منه : $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \le \int_0^1 f_n(x)\,dx$

أي $I_{n+1} \le I_n$

نتيجة : المتتالية (I_n) متناقصة

4 ـــ من أجل $n = 0$ لدينا : $f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ إذن : $f_0(x) \ge 0$ على المجال $[0 ; 1]$

و $f_0(x) - 1 = \frac{1}{1+x+x^2} - 1 = \frac{-x-x^2}{1+x+x^2} \le 0$ إذن : $f_0(x) \le 1$

منه : $0 \le f_0(x) \le 1$

من أجل $n > 0$: لدينا : $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$ إذن : $f_n(x) \ge 0$ على المجال $[0 ; 1]$

$$f_n(x) - x^n = \frac{x^n}{1+x+x^2} - x^n = x^n\left(\frac{1}{1+x+x^2} - 1\right) = \frac{x^n}{1+x+x^2}(-x-x^2) \le 0$$ إذن : $f_n(x) \le x^n$

منه : $0 \le f_n(x) \le x^n$

خلاصة : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ و من أجل $x \in [0 ; 1]$ فإن $0 \le f_n(x) \le x^n$

5 ـــ حسب السؤال السابق : $0 \le f_n(x) \le x^n$

إذن : $0 \le \int_0^1 f_n(x)\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx$

أي : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}[x^{n+1}]_0^1$

أي : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}(1-0)$

أي : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ و هو المطلوب

6 ـــ لدينا : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ إذن : حسب الحصر فإن $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

7 ـــ لنحسب I_n بالتجزئة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 x^n\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 x^n f_0(x)\, dx$$

بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = f_0(x) \\ v'(x) = x^n \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = f_0'(x) = -f(x) \\ v(x) = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \end{array}\right.$ لأن $f(x) = -f_0'(x)$

منه : $I_n = \left[\dfrac{1}{n+1} x^{n+1} f_0(x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{-1}{n+1} x^{n+1} f(x)\, dx$

$$= \frac{1}{n+1} f_0(1) - 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, dx$$

$= \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx$ و هو المطلوب

8 ـــ حسب الجزء I من التمرين فإن : $1/3 \le f(x) \le 1$

إذن : $\dfrac{1}{3} x^{n+1} \le f(x)\, x^{n+1} \le x^{n+1}$ من أجل $0 \le x \le 1$

منه : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3} x^{n+1}\, dx \le \int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \int_0^1 x^{n+1}\, dx$

منه : $\dfrac{1}{3(n+2)}\left[x^{n+2}\right]_0^1 \le \displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \dfrac{1}{n+2}\left[x^{n+2}\right]_0^1$

أي $\dfrac{1}{3(n+2)} \le \displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \dfrac{1}{n+2}$ و هو المطلوب

9 ـــ لدينا : $\dfrac{1}{3(n+2)} \le \displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \dfrac{1}{n+2}$

إذن : $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{3(n+2)}\right) \le \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$

أي $\dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} \le \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

منه : $\dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} \le \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \le \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

أي $\dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

10 ـــ يكون الحصر مقتربا من 0,01 بالزيادة إذا و فقط إذا كان :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left[\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)}\right] \le 0{,}01$$

أي : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} \le 0{,}01$

أي : $\dfrac{2}{3(n+1)(n+2)} \le 0{,}01$

أي : $0{,}01 \times 3(n+1)(n+2) \geq 2$

أي : $0{,}03(n^2 + 3n + 2) \geq 2$

أي : $0{,}03\, n^2 + 0{,}09\, n + 0{,}06 \geq 2$

أي : $0{,}03\, n^2 + 0{,}09\, n - 1{,}94 \geq 0$

أي : $3n^2 + 9n - 194 \geq 0$

لنحل المعادلة $3x^2 + 9x - 194 = 0$ في IR

$x = 81 + 2328 = 2409$

إذن : $x_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{2409}}{6}$ و $x_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{2409}}{6}$

منه إشارة $3x^2 + 9x - 194$ كمايلي :

x	$-\infty$	x_2		x_1	$+\infty$
$3x^2 + 9x - 194$	+	0	-	0	+

لاحظ أن $x_1 \approx \dfrac{-9 + 49{,}08}{6} \approx \dfrac{40{,}08}{6} \approx 6{,}68$

إذن : أصغر عدد طبيعي n_0 يحقق $3n_0^2 + 9n_0 - 194 \geq 0$ هو $n_0 = 7$

نتيجة : يكون الحصر يقترب إلى $0{,}01$ بالزيادة إبتداء من $n_0 = 7$

11 ــ من أجل $n = 7$ نحصل على : $\dfrac{1}{3\times 8} + \dfrac{1}{8\times 9} \leq I_7 \leq \dfrac{1}{3\times 8} + \dfrac{1}{3\times 8\times 9}$

أي : $0{,}0462 \leq I_7 \leq 0{,}0555$

إذن : $I_7 = 0{,}05$ بتقريب $0{,}01$ بالزيادة .

<u>التمرين ــ 19</u>

الجزء I : لتكن f الدالة المعرفة على $IR - \{-1\}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ أكتب $f(x)$ من الشكل $ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

3 ــ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مماسين ميلهما 3 عند نقطتين A و B يطلب إحداثياهما .

4 ــ برهن أن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5 ــ أكتب معادلتي المماسين عند A و B

6 ــ أثبت أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) و أخر شاقولي (D)

لتكن I نقطة تقاطع (Δ) و (D)

7 ــ أثبت أن I مركز تناظر للمنحنى (C) ثم أنشئ (C)

8 ــ إستنتج إنشاء للمنحنى (C') الممثل للدالة v حيث $v(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{|x+1|}$

ليكن D_λ الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ ؛ $x = \lambda$ حيث $\lambda \in]1 ; +\infty[$

9 ــ أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز D_λ ثم عين $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

الجزء II

لتكن g الدالة المعرفة كمايلي : $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + \ln x - 2}{\ln x + 1}$

1 ــ عين مجموعة تعريف الدالة g

2 ــ أثبت أن g هي مركب الدالة f و دالة أخرى يطلب تعيينها

3 ــ إستنتج عبارة $g'(x)$ بدلالة $f'(\ln x)$ ثم أدرس إشارتها

4 ــ أرسم جدول تغيرات الدالة g ثم أنشئ منحناها (C'') في معلم متعامد و متجانس .

الجزء III

لتكن h_m الدالة المعرفة على IR بـ $h_m(x) = \dfrac{e^{2mx} + e^{mx} - 2}{e^{mx} + 1}$ حيث m عدد حقيقي معطى غير معدوم .

1 ــ من أجل $m = 1$ أثبت أن h_1 هي مركب الدالة f و دالة أخري يطلب تعيينها

2 ـ أدرس تغيرات الدالة h_1

3 ـ ليكن $m \in IR^*$ أثبت أن $h_m = f \circ u_m$ حيث u_m دالة يطلب تعيينها

4 ـ أدرس تغيرات الدالة u_m

5 ـ حل في IR المعادلة $u_m(x) = t$ ذات المجهول x حيث t عدد حقيقي معطى

الحـل ـ 19

1 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} -1} \frac{1-1-2}{x+1} = \lim_{y \underset{<}{\to} 0} \frac{-2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{1-1-2}{x+1} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{-2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $IR - \{-1\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2 + x - 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 + 2x + 3$ كما يلي :

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ إذن : $x^2 + 2x + 3 > 0$ من أجل كل x من IR

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $IR - \{-1\}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

2 ـ باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 2 & x + 1 \\ \hline x^2 + x & x \\ 0 - 2 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = x - \dfrac{2}{x+1}$

3 ـ يكون للمنحنى (C) مماس ميله 3 عند نقطة ذات الفاصلة x_0 إذا و فقط إذا كان x_0 حلا للمعادلة $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 3 \\ x \neq -1 \end{array} \right.$ كمايلي :

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} = 3$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = x^2 + 2x + 3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = -2$$

نتيجة : (C) يقبل مماسين ميلهما 3 أحدهما عند النقطة $A(0 ; f(0))$ و الأخر عند النقطة $B(-2 ; f(-2))$:

$f(0) = -2$ إذن : $A(0 ; -2)$

$f(-2) = \dfrac{4 - 2 - 2}{-1} = 0$ إذن : $B(-2 ; 0)$

4 ـ بما أن فاصلة A تساوي ترتيب B و ترتيب A تساوي فاصلة B فإن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5 ـ المماس عند A له المعادلة : $y = 3(x - 0) - 2$ أي $y = 3x - 2$

المماس عند B له المعادلة : $y = 3(x+2) + 0$ أي $y = 3x + 6$

6 ـ $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} \left[x - \frac{2}{x+1} - x\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x+1} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{2}{x+1} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x+1} = 0$

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

من جهة أخرى $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $x = -1$ مقارب شاقولي للمنحنى (C)

7 ـ لتكن $I(x ; y)$ نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

$I \in (D)$ إذن : $x = -1$

$I \in (\Delta)$ إذن : $y = x$ أي $y = -1$

نتيجة : $I(-1 ; -1)$

ليكن $x \neq -1$ إذن : $-x \neq 1$

منه : $-2 - x \neq -2 + 1$

أي $-2 - x \neq -1$

أي f معرفة من أجل $-2 - x$

$$f(-2-x) = \frac{(-2-x)^2 + (-2-x) - 2}{-2-x+1}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 2 - x - 2}{-2-x+1}$$

$$= \frac{x^2 + 3x}{-x-1}$$

$$2(-1) - f(x) = -2 - \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$$

$$= \frac{-2x - 2 - x^2 - x + 2}{x+1}$$

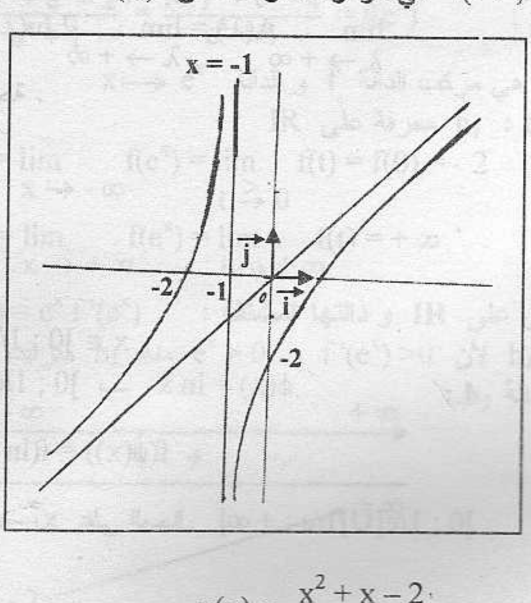
$$= \frac{-x^2 - 3x}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 + 3x}{-x-1}$$

نتيجة : $f(-2-x) = 2(-1) - f(x)$

إذن : النقطة $I(-1 ; -1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C)

الإنشاء :



8 ـ $v(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{|x+1|}$

الفهرس

سلسلة هبــاج

TEL : 0773 26 52 81

الدوال الأصلية

Kimou.

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I جزئي من IR

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F تحقق الشروط التالية :

(1) F قابلة للاشتقاق على I

(2) من أجل كل x من المجال I : $F'(x) = f(x)$

أمثلة : $f : x \longmapsto x^3 - 2x + 1$ $\quad$ $g : x \longmapsto 3x^2 - 2$

الدالة f هي الدالة الأصلية للدالة g على IR لأن $\begin{cases} f \text{ قابلة للاشتقاق على } IR \\ \text{من أجل كل } x \text{ من } IR : f'(x) = g(x) \end{cases}$

ملاحظة : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن كل دالة معرفة من الشكل $x \longmapsto F(x) + k$ حيث k ثابت حقيقي هي أيضا دالة أصلية للدالة f على المجال I لأنها تحقق شروط التعريف .

مثلا : في المثال السابق الدالة $h : x \longmapsto x^3 - 2x + 7$ هي أيضا دالة أصلية للدالة g على IR

لأن من أجل كل x من IR : $h'(x) = 3x^2 - 2$

وجود الدوال الأصلية :

نظرية :

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لا نهائي من الدوال الأصلية على هذا المجال

خاصية : f دالة مستمرة على مجال I . x_0 عدد حقيقي من المجال I و $y_0 \in IR$ من بين الدوال الأصلية غير المنتهية للدالة f على المجال I توجد دالة وحيدة F تحقق الشروط : $\begin{cases} F \text{ دالة أصلية للدالة } f \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$

نشاط ــ 1

لتكن f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = 2x + \cos x$

1 ــ عين كل الدوال الأصلية للدالة f على IR

2 ــ عين الدالة الأصلية F للدالة f على IR و التي تحقق $F(\pi) = -1$

الحــل ــ 1

1 ــ الدوال الأصلية للدالة f على IR هي كل الدوال التي تكتب من الشكل : $x \longmapsto x^2 + \sin x + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

2 ــ لتكن F الدالة الأصلية لــ f حيث $F(x) = x^2 + \sin x + k$

لدينا : $F(\pi) = \pi^2 + \sin \pi + k = \pi^2 + k$

إذن : $F(\pi) = -1 \Leftrightarrow \pi^2 + k = -1$

$\Leftrightarrow k = -1 - \pi^2$

منه : الدالة F المطلوبة هي : $F(x) = x^2 + \sin x - \pi^2 - 1$

نشاط ــ 2

أثبت بطريقتين مختلفتين أن الدالتين F و G المعرفتان على $]2 ; +\infty[$ كمايلي هما دالتان أصليتان لنفس الدالة التي يطلب تعيينها :

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad ; \quad G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$$

الحــل ــ 2

كل من الدالتين F و G قابلتين للاشتقاق على المجال $]2 ; +\infty[$ إذن : يكفي أن يكون $F'(x) = G'(x)$ من أجل كل x من $]2 ; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$$G'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2} + 1 = \frac{-3+(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

نتيجة : من أجل كل x من $]2\,;+\infty[$: $F'(x) = G'(x)$ إذن : F و G هما دالتان أصليتان للدالة $x \longmapsto \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ على المجال $]2\,;+\infty[$

يمكن إثبات أن $F'(x) = G'(x)$ بطريقة أخرى كما يلي :

$$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x = \frac{2x-1+x^2-2x}{x-2} = \frac{x^2-1}{x-2}$$

$$F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2} = \frac{x^2-2x+3-4+4}{x-2} = \frac{x^2-1-2(x-2)}{x-2} = \frac{x^2-1}{x-2} - 2$$

نتيجة : من أجل كل x من $]2\,;+\infty[$: $F(x) = G(x) - 2$

إذن : $F'(x) = G'(x)$

منه : F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على $]2\,;+\infty[$

الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :

الدالة f	الدالة الأصلية للدالة f	ملاحظات
a	$ax + b$	$x \in IR$ $a \in IR\,;\, b \in IR$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$x \in IR\,;\, c \in IR$ $n \in IN$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x \in]0\,;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$x \in IR\,;\, c \in IR$
$\cos x$	$\sin x + c$	$x \in IR\,;\, c \in IR$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$	$x \in IR$ et $x \neq (2k+1)\pi/2$
$u' \times u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$n \in IN$ u قابلة للاشتقاق
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ u قابلة للاشتقاق
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$	u قابلة للاشتقاق $u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	u قابلة للاشتقاق

أمثلة : باستعمال الجدول السابق عين الدوال الأصلية للدوال التالية :

(1) $x \in IR$: $f(x) = x^3 - 3x + 5$

(2) $x \in IR^*$: $g(x) = \frac{2}{x^2}$

(3) $x \in]0\,;+\infty[$: $h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $x \in IR$: $k(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$

(5) $x \in IR$: $\phi(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

الحـل :

(1) لدينا : الدالة الأصلية لـ $x \longmapsto x^3$ هي : $x \longmapsto \frac{1}{3+1}x^{3+1} = \frac{1}{4}x^4$

و الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto x$ هي : $x \longmapsto \frac{1}{1+1} x^{1+1} = \frac{1}{2} x^2$

و الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto 5$ هي : $x \longmapsto 5x$

منه : الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto x^3 - 3x + 5$ هي الدالة :

$x \longmapsto \frac{1}{4} x^4 - 3\left(\frac{1}{2} x^2\right) + 5x + c$ حيث $c \in IR$

أي : $x \longmapsto \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + c$

(2) $g(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$

لدينا : الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto x^{-2}$ هي الدالة $x \longmapsto \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$

منه : الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto 2x^{-2}$ هي $x \longmapsto -\frac{2}{x} + c$

أي : الدالة الأصلية لـــ g هي الدالة $x \longmapsto \frac{-2}{x} + c$

(3) $h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 3x^{-3} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto x^{-3}$ هي $x \longmapsto \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} = \frac{1}{-2} x^{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ هي $x \longmapsto \sqrt{x}$

منه : الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto 3x^{-3} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ هي الدالة $x \longmapsto 3\left(\frac{-1}{2x^2}\right) - 2\sqrt{x} + c$

أي : الدالة الأصلية لـــ h هي الدالة $x \longmapsto \frac{-3}{2x^2} - 2\sqrt{x} + c$

(4) نضع $u(x) = x^2 + 2x + 5$ إذن : $u'(x) = 2x + 2$ أي $u'(x) = 2(x+1)$

منه : $(x+1) = \frac{u'(x)}{2}$ إذن : $k(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 5)^2$

أي : $k(x) = \frac{1}{2} u'(x)[u(x)]^2$

لكن الدالة الأصلية لـــ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^2$ هي : $x \longmapsto \frac{1}{2+1} [u(x)]^{2+1} = \frac{1}{3} [u(x)]^3$

إذن : الدالة الأصلية لـــ $\frac{1}{2} u'(x) \times [u(x)]^2$ هي : $x \longmapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} [u(x)]^3 = \frac{1}{6} [u(x)]^3$

منه : الدالة الأصلية لـــ k هي الدالة : $x \longmapsto \frac{1}{6} (x^2 + 2x + 5)^3 + c$

(5) نضع $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \frac{1}{2} u'(x)$

إذن : $\phi(x) = \frac{3 \times \frac{1}{2} u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي $\phi(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

لكن الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ هي الدالة $x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$

منه : الدالة الأصلية للدالة $\frac{3}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$ هي الدالة $x \longmapsto \frac{3}{2} (2\sqrt{u(x)})$

أي : الدالة الأصلية لـــ ϕ هي : $x \longmapsto 3\sqrt{x^2 + 1} + c$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I

فإن حلول المعادلة التفاضلة $y' = f(x)$ على المجال I هي الدوال y حيث $y = F(x) + c$ مع c ثابت حقيقي .

مثلا : حلول المعادلة التفاضلية $y' = x^2 - 2x + 5$ على IR هي مجموعة الدوال y حيث $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$

حيث $c \in IR$ لأن الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto x^2 - 2x + 5$ على IR

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على المجال I فإن حلول المعادلة $y'' = f(x)$ على المجال I هي الدوال y من الشكل : $y = G(x) + ax + b$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة .

مثلا : حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ هي الدوال y من الشكل :

$y = -\sin x + ax + b$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة لأن :

الدالة $x \longmapsto -\cos x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \sin x$ على IR

و الدالة $x \longmapsto -\sin x$ هي دالة اصلية للدالة $x \longmapsto -\cos x$ على IR

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' + w^2 y = 0$

إذا كان w عدد حقيقي غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + w^2 y = 0$ على IR هي مجموعة الدوال y من الشكل : $y = a\cos wx + b\sin wx$ حيث a و b أعداد حقيقية

مثلا : حلول المعادلة $y'' + 3y = 0$ هي الدوال من الشكل : $y = a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة .

<u>نشاط :</u>

حل في IR المعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 - 2x + 5$ ثم إستنتج الحل F الذي يحقق $F(1) = -2$

<u>الحل :</u>

حلول المعادلة $y' = 3x^2 - 2x + 5$ هي الدوال من الشكل :

$y = x^3 - x^2 + 5x + c$ حيث c ثابت حقيقي .

إذن : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c$ حيث $c \in R$

منه : $F(1) = -2 \Leftrightarrow 1 - 1 + 5 + c = -2$

$\Leftrightarrow c = -7$

أخيرا : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$

<u>نشاط :</u>

حل في IR المعادلة التفاضلية $y'' + \pi^2 y = 0$ ثم إستنتج الحل F الذي يحقق الشروط : $F(1/2) = 2/3$ و $F'(2/3) = 0$

<u>الحل :</u>

حلول المعادلة $y'' + \pi^2 y = 0$ هي الدوال من الشكل $y = a\cos\pi x + b\sin\pi x$

منه : $F(x) = a\cos\pi x + b\sin\pi x$ حيث a و b أعداد حقيقية

إذن : $F(1/2) = 2/3 \Leftrightarrow a\cos\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 0 + b = 2/3$

$\Leftrightarrow b = 2/3$

من جهة أخرى : $F'(x) = -a\pi\sin\pi x + b\pi\cos\pi x$

إذن : $F'(2/3) = 0 \Leftrightarrow -a\pi\sin\frac{2\pi}{3} + b\pi\cos\frac{2\pi}{3} = 0$

$\Leftrightarrow -a\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{3}\pi\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$ لأن $b = 2/3$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}a = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

نتيجة : $F(x) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}\cos\pi x + \frac{2}{3}\sin\pi x$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين – 1

حل في IR المعادلة التفاضلية : $y'' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

الحـل – 1

لدينا الدالة $x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

و الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + cx + b$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$

منه : حلول المعادلة $y'' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدوال y حيث $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + cx + b$

حيث c و b أعداد ثابتة .

التمرين – 2

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I

1 – $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x}$: $I =]0 ; +\infty[$

2 – $f(x) = e^{ax+b}$: $I = IR$ ؛ $a \neq 0$

3 – $f(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2-x-3}$: $I = IR$

4 – $f(x) = \cos(2x)\, e^{\sin 2x}$: $I = IR$

الحـل – 2

1 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ هي $x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{1/x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{-1}{x^2} e^{1/x}$

أي : الدالة $x \longmapsto -e^{1/x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$

2 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto ax + b$ هي a حيث $a \neq 0$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{ax+b}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto a\, e^{ax+b}$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto e^{ax+b}$ حيث $a \neq 0$

3 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto x^2 - x - 3$ هي $x \longmapsto 2x - 1 = -2\left(-x + \frac{1}{2}\right)$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto -2\left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2-x-3}$

أي : الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{2} e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2-x-3}$

4 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto \sin 2x$ هي $x \longmapsto 2\cos 2x$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{\sin 2x}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 2\cos(2x)\, e^{\sin 2x}$

أي : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{2} e^{\sin 2x}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \cos(2x)\, e^{\sin 2x}$

التمرين – 3

عين في كل حالة من الحالات التالية الدالة الأصلية للدالة f على المجال I

1 – $I =]-2 ; +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2 – $I =]1\,;+\infty[\;:\; f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

3 – $I =]0\,;\pi[\;:\; f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

4 – $I = IR \;:\; f(x) = \dfrac{-2e^x}{e^x+1}$

الحـل – 3

1 – لاحظ أن مشتقة $x \longmapsto x+2$ هي $x \longmapsto 1$

منه : الدالة $x \longmapsto \ln|x+2|$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$ على $IR - \{-2\}$

بما أن على المجال I : $x+2>0$ فإن الدالة $x \longmapsto \ln(x+2)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

2 – مشتقة الدالة $x \longmapsto x^2-1$ هي الدالة $x \longmapsto 2x$

إذن : الدالة $x \longmapsto \ln|x^2-1|$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$ على $IR - \{-1\,;1\}$

أي الدالة $x \longmapsto \ln(x^2-1)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$ على I لأن $x^2-1>0$

منه : الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ على I

3 – مشتقة الدالة $x \longmapsto \sin x$ هي $x \longmapsto \cos x$

إذن : الدالة $x \longmapsto \ln|\sin x|$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ من أجل $\sin x \neq 0$

أي : الدالة $x \longmapsto \ln|\sin x|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ على المجال I

4 – مشتقة الدالة $x \longmapsto e^x+1$ هي الدالة $x \longmapsto e^x$ على IR

منه : الدالة $x \longmapsto \ln|e^x+1|$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ على IR

أي الدالة $x \longmapsto -2\ln|e^x+1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \dfrac{-2e^x}{e^x+1}$ على IR

التمرين – 4

لتكن f دالة معرفة على $]-2\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$

1 – عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من المجال $]-2\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-2\,;+\infty[$

الحـل – 4

1 –
$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{a(x+2)+b}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a=2 \\ 2a+b=3 \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} a=2 \\ b=-1 \end{matrix}\right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $]-2\,;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2 – الدالة $x \longmapsto \ln|x+2|$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$ على $IR - \{-2\}$

إذن : الدالة $x \longmapsto 2\ln(x+2)$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{2}{x+2}$ على $]-2\,;+\infty[$ لأن $x+2>0$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{-2+1}(x+2)^{-2+1}$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^2} = (x+2)^{-2}$ على $IR - \{-2\}$

أي : الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{x+2}$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$ على المجال $]-2\,;+\infty[$

نتيجة : الدالة $x \longmapsto 2\ln(x+2) - \left(\frac{-1}{x+2}\right)$ أصلية للدالة f على $]-2\,;+\infty[$

أي الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x+2} + \ln(x+2)^2$ دالة أصية للدالة f على $]-2\,;+\infty[$

تحقيق : نضع $F(x) = \frac{1}{x+2} + \ln(x+2)^2$

إذن : $F'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{2(x+2)}{(x+2)^2}$

منه : $F'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2} = f(x)$

إذن : فعلا F هي دالة أصلية لـــ f على $]-2\,;+\infty[$

التمرين ـــ 5

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

1 ـــ عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$: $f(x) = a + \frac{b\,e^x}{e^x - 1}$

2 ـــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$

الحـل ـــ 5

1 ـــ من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$a + \frac{b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{a\,e^x - a + b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{(a+b)\,e^x - a}{e^x - 1}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$ نحصل على $\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ -a=-2 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{r} b=1-a \\ a=2 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{r} b=-1 \\ a=2 \end{array}\right\}$

نتيجة : $f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$

2 ـــ لدينا : الدالة $x \longmapsto 2x$ أصلية للدالة $x \longmapsto 2$

و الدالة $x \longmapsto \ln|e^x - 1|$ أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$

منه : الدالة $x \longmapsto 2x - \ln|e^x - 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$

أي $F(x) = 2x - \ln|e^x - 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

التمرين ـــ 6

في كل حالة من الحالات التالية بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D

1 ـــ $F(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$ ؛ $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2+1)^2}$: $D = IR$

2 ـــ $F(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3}$ ؛ $f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$: $D = IR$

3 ـــ $F(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ ؛ $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$: $D =]-\infty\,;2[$

4 ـــ $F(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$ ؛ $f(x) = \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}$: $D =]0\,;+\infty[$

الحـل ـــ 6

1 ـــ F قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1) - 2x(x^2 - 3x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 - 2x^3 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2+1)^2}$$

$$= f(x)$$

إذن : F هي دالة أصلية لـــ f على IR

2 ــ F قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{x^2 + 3 - 2x(x+1)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$$

$= f(x)$ إذن : F هي دالة أصلية لـــ f على IR

3 ــ F قابلة للاشتقاق على]-∞ ; 2[و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

$= f(x)$ إذن : F هي دالة أصلية لـــ f على]-∞ ; 2[

4 ــ F قابلة للاشتقاق على]0 ; +∞[و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{6x - (3x-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$= f(x)$ إذن : F هي دالة أصلية لـــ f على]0 ; +∞[

__التمرين ــ 7__

F و G دالتان معرفتان على *IR كما يلي : $F(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$$G(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 : x \in]-\infty ; 0[\\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

1 ــ بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على *IR

2 ــ هل يوجد عدد حقيقي ثابت c حيث من أجل كل x من *IR : $G(x) = F(x) + c$ ؟

__الحــل ــ 7__

1 ــ لدينا : $G(x) = \begin{cases} F(x) - 1 : x \in]-\infty ; 0[\\ F(x) + 2 : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$ إذن : $G'(x) = \begin{cases} F'(x) : x \in]-\infty ; 0[\\ F'(x) : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

أي : $G'(x) = F'(x) : x \in IR^*$

منه : الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجموعة *IR

2 ــ إذا وجد عدد حقيقي c حيث $G(x) = F(x) + c$ من أجل كل x من *IR فإن :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 = x^2 + \frac{1}{x} + c \\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 = x^2 + \frac{1}{x} + c \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} -1 = c \\ 2 = c \end{cases}$$ مستحيل

إذن : لا يوجد أي عدد حقيقي c يحقق : من أجل كل x من IR^* $G(x) = F(x) + c$

التمرين ــ 8

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3}$

1 ــ تحقق أن الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2}$ هي دالة أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

2 ــ إستنتج الدالة G الأصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x = 11/8$

الحـل ــ 8

1 ــ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $F'(x) = \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{-2x}{x^4}\right)$

منه : $F'(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3} = f(x)$

إذن : F أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

2 ــ G أصلية لـ f إذن : $G(x) = F(x) + c$ حيث $c \in IR$

أي : $G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + c$

منه : $G\left(\frac{11}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{8}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \frac{8}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \left(\frac{8}{11}\right)^2 + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{121}{64 \times 2} + \frac{8}{11 \times 2} - \frac{24}{11 \times 11}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-121 \times 11 \times 11 + 8 \times 11 \times 64 - 24 \times 64 \times 2}{11 \times 11 \times 64 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-12081}{15488}$$

نتيجة : الدالة G المطلوبة هي $G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{12081}{15488}$

التمرين ــ 9

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 3x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$

1 ــ تحقق أن الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2+1)$ هي دالة أصلية لـ f على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ــ عين الدالة G الأصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x = 1$

الحـل ــ 9

1 ــ من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ لدينا : $F'(x) = \frac{3}{2}(2x) + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} = f(x)$

إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

2 ــ G دالة أصلية لـ f إذن : $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2+1) + c$ حيث $c \in IR$

منه : $G(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \ln 1 - \ln(1+1) + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = \ln 2 - \frac{3}{2}$$

نتيجة : $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2+1) + \ln 2 - \frac{3}{2}$ هي الدالة المطلوبة .

التمرين ــ 10

F و G دالتان معرتان على IR كمايلي : $F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$ ؛ $G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على IR بحساب الفرق $F(x) - G(x)$ ثم بحساب المشتقات .

الحل – 10

1 – بحساب الفرق $F(x) - G(x)$:

من أجل كل x من IR :

$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} - \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{5x^2 - x + 3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{5(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$= 5$$

إذن : $F(x) - G(x) = 5$ منه : $F(x) = G(x) + 5$

أي : $F'(x) = G'(x)$

أي F و G أصليتان لنفس الدالة .

2 – بحساب المشتقات :

$$F'(x) = \frac{(10x - 1)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(5x^2 - x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{10x^3 + 10x^2 + 10x - x^2 - x - 1 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 5x^2 + x - 3}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$G'(x) = \frac{-6(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(-6x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 - 6x - 6 + 12x^2 + 4x + 6x + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

نتيجة : من أجل كل x من IR : $F'(x) = G'(x)$ إذن : F و G أصليتان لنفس الدالة .

التمرين – 11

أوجد الدالة الأصلية للدالة f على IR في كل حالة من الحالات التالية :

1 – $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

2 – $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{3}$

3 – $f(x) = -3\sin x + 2\cos x + 1$

4 – $f(x) = -\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\sin(x + \pi)$

5 – $f(x) = x^2 + 2x - e^x + \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

الحل – 11

1 – $F(x) = \dfrac{1}{4+1}x^{4+1} - 4\left(\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + 3\left(\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}\right) - 6\left(\dfrac{1}{1+1}x^{1+1}\right) + x + c$

$= \dfrac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + x + c$ الدالة الأصلية لـ f

2 – $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3}$

منه $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}\right) - \dfrac{2}{3}x + c$

$= \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{3}x + c$ الدالة الأصلية لـ f

3 – $F(x) = 3\cos x + 2\sin x + x + c$ الدالة الأصلية لـ f

4 – $F(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(x+\pi) + c$ الدالة الأصلية لـ f

5 – $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - e^x + \ln(x^2+1) + c$ الدالة الأصلية لـ f

التمرين – 12

أوجد الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال $]0 ; +\infty[$

1 – $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ **4 –** $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1$

2 – $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4}$ **5 –** $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x}$

3 – $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}$

الحـل – 12

1 – $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = 2 - x^{-2}$

منه : $F(x) = 2x - \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = 2x + x^{-1} = 2x + \frac{1}{x}$

2 – $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}$

منه : $F(x) = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$

3 – $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} = 1 + x^{-3} - 2(x^{-4})$

منه : $F(x) = x + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} - 2\left(\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}\right) = x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3}$

4 – $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1$

منه : $F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$

5 – $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x}$

$F(x) = -e^{-x} + 2\ln|x|$

التمرين – 13

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 3^x - 2^x$

عين دالة أصلية للدالة f على IR

الحـل – 13

من أجل كل x من IR : $f(x) = e^{x\ln 3} - e^{x\ln 2}$

منه : $F(x) = \frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}$

أي : $F(x) = \frac{1}{\ln 3}(3^x) - \frac{1}{\ln 2}(2^x)$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين – 14

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل $u' \times u^n$ عين الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال I

1 – $f(x) = (x-1)^4$: I = IR

2 – $f(x) = \frac{(x+2)^3}{5}$: I = IR

3 – $f(x) = 3(3x+4)^5$: I = IR

4 – $f(x) = e^x(e^x-1)^2$: I = IR

5 – $f(x) = x^2(x^3+1)^4$: $I = IR$

6 – $f(x) = \frac{1}{x}[\ln(x)]^2$: $I =]0\,;+\infty[$

7 – $f(x) = 2\cos x \sin^2 x$: $I = IR$

8 – $f(x) = \tan^3 x(\frac{1}{\cos^2 x})$: $I =]-\pi/2\,;\pi/2[$

9 – $f(x) = -20\,x\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3$: $I = IR$

10 – $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x}+2)^3$: $I = IR$

الحـل – 14

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة

$x \longmapsto \frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^n$ إذن :

1 – نضع : $u(x) = x - 1$ منه $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = (x-1)^4 = u'(x) \times [u(x)]^4$

منه : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{4+1}[u(x)]^{4+1}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto (x-1)^4$

أي : $F(x) = \frac{1}{5}(x-1)^5 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 – نضع : $u(x) = x + 2$ إذن : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \frac{(x+2)^3}{5} = \frac{1}{5}u'(x)[u(x)]^3$

منه : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3+1}[u(x)]^{3+1}\right)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{5}u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = \frac{1}{20}(x+2)^4 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 – نضع : $u(x) = 3x + 4$ إذن : $u'(x) = 3$

منه : $f(x) = 3(3x+4)^5 = u'(x)[u(x)]^5$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{6}[u(x)]^6$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^5$

أي : $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^6 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 – نضع : $u(x) = e^x - 1$ إذن : $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = e^x(e^x-1)^2 = u'(x)[u(x)]^2$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}[u(x)]^3$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^2$

أي الدالة $F(x) = \frac{1}{3}(e^x-1)^3 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

5 – نضع : $u(x) = x^3 + 1$ منه : $u'(x) = 3x^2$ أي $x^2 = \frac{1}{3}u'(x)$

منه : $f(x) = x^2(x^3+1)^4 = \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}[u(x)]^5$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$

أي : $F(x) = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

6 – نضع : $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = \frac{1}{x}$

منه : $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2 = u'(x)[u(x)]^2$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}[u(x)]^3$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^2$

أي : $F(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

7 ـ نضع : $u(x) = \sin x$, إذن : $u'(x) = \cos x$

إذن : $f(x) = 2\cos x \sin^2 x = 2\,u'(x)[u(x)]^2$

منه : الدالة $x \longmapsto 2 \times \frac{1}{3}[u(x)]^3$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 2\,u'(x)[u(x)]^2$

أي : $F(x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

8 ـ نضع : $u(x) = \tan x$ إذن : $u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

منه : $f(x) = \tan^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = [u(x)]^3 u'(x)$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{4}[u(x)]^4$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = \frac{1}{4}\tan^4 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

9 ـ نضع : $u(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$ منه : $u'(x) = -x$

إذن : $f(x) = -20x\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3 = 20\,u'(x)[u(x)]^3$

إذن : الدالة $x \longmapsto 20 \times \frac{1}{4}[u(x)]^4$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 20\,u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = 5\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^4 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

10 ـ نضع : $u(x) = e^{-2x} + 2$ إذن : $u'(x) = -2e^{-2x}$ منه : $e^{-2x} = -\frac{1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x} + 2)^3 = -\frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$

منه : الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}[u(x)]^4$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -\frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = -\frac{1}{8}(e^{-2x} + 2)^4 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 15

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال $x \longmapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ $f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}$: $I =]2\,;+\infty[$

2 ـ $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$: $I =]-1\,;+\infty[$

3 ـ $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3}$: $I =]1/2\,;+\infty[$

4 ـ $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$: $I =]1\,;+\infty[$

5 ـ $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$: $I = IR$

6 ـ $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$: $I = IR$

7 ـ $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$: $I =]-1\,;+\infty[$

8 – $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$: $I =]-\pi/2 \,;\, \pi/2[$

9 – $f(x) = \dfrac{-e^x - 2}{(e^x + 2x)^2}$: $I =]0 \,;\, +\infty[$

10 – $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x + 2)^2}$: $I = [1 \,;\, +\infty[$

الحل – 15

لاحظ أن : $\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n} = u'(x) \times [u(x)]^{-n}$

إذن : الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{1-n}[u(x)]^{1-n}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ حيث $n \neq 1$

أي الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n}$

1 – نضع : $u(x) = x - 2$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{5}{(x-2)^7} = 5\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^7}\right)$

منه : الدالة $x \longmapsto 5\left(\dfrac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}}\right)$ دالة أصلية لـ $x \longmapsto 5\,\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^7}$

أي : $F(x) = \dfrac{-5}{6(x-2)^6} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 – نضع : $u(x) = x + 1$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} = -2\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

إذن : الدالة $x \longmapsto -2\left(\dfrac{-1}{2(u(x))^2}\right)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -2\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 – نضع : $u(x) = 2x - 1$ إذن : $u'(x) = 2$

منه : $f(x) = \dfrac{2}{(2x-1)^3} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{2(u(x))^2}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{2(2x-1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 – نضع : $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2} = \dfrac{1/x}{(\ln x)^2} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{\ln x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 – نضع : $u(x) = 1 + e^x$ إذن : $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{1+e^x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6 ــ نضع : $u(x) = x^2 - x + 1$ إذن : $u'(x) = 2x - 1$

منه : $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \frac{-1}{x^2-x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7 ــ نضع : $u(x) = x^3 + 1$ منه : $u'(x) = 3x^2$

إذن : $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4} = 2\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4}\right)$

الدالة $x \longmapsto 2\left(\frac{-1}{3[u(x)]^3}\right)$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto 2\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4}\right)$

إذن : $F(x) = \frac{-2}{3(x^3+1)^3} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8 ــ نضع : $u(x) = \cos x$ إذن : $u'(x) = -\sin x$

منه : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} = -\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

الدالة $x \longmapsto -\left(\frac{-1}{2(u(x))^2}\right)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9 ــ نضع : $u(x) = e^x + 2x$ منه : $u'(x) = e^x + 2$

منه : $f(x) = \frac{-e^x - 2}{(e^x + 2x)^2} = -\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right)$

الدالة $x \longmapsto -\left(\frac{-1}{u(x)}\right)$ أصلية لـ $x \longmapsto -\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right)$

منه : $F(x) = \frac{1}{e^x + 2x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10 ــ نضع : $u(x) = \ln x + 2$ منه : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^2} = \frac{1/x}{(\ln x + 2)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{u(x)}$ أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

منه : $F(x) = \frac{-1}{\ln x + 2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 16

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

1 ــ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$: $I =]1 ; +\infty[$

2 ــ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$: $I =]2 ; +\infty[$

3 ــ $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$: $I =]3 ; +\infty[$

4 ــ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$: $I =]-\infty ; 2[$

5 – $I =]0 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$

6 – $I =]3 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

7 – $I =]0 ; \pi[\quad : \quad f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$

8 – $I = IR \quad : \quad f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}}$

9 – $I =]0 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

10 – $I =]1 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

الحل – 16

حسب الخواص فإن الدالة $x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

1 – نضع $u(x) = x - 1$ إذن : $u'(x) = 1$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 – نضع $u(x) = x^2 - 4$ إذن : $u'(x) = 2x$

منه : $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2 - 4} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 – نضع $u(x) = x^2 - x - 6$ إذن : $u'(x) = 2x - 1$

منه : $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2 - x - 6} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 – نضع $u(x) = 2 - x$ إذن : $u'(x) = -1$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + 3 = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} + 3$

إذن : $F(x) = -2\sqrt{2-x} + 3x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 – نضع $u(x) = e^x - 1$ منه : $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = \dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2(2\sqrt{e^x - 1}) + c$

أي : $F(x) = 4\sqrt{e^x - 1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6 – نضع $u(x) = x - 3$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x-3}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 2\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه : $F(x) = 2(2\sqrt{x}) - 2(2\sqrt{u(x)}) + c$

أي : $F(x) = 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x-3} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7 ـــ نضع $u(x) = \sin x$ منه : $u'(x) = \cos x$

إذن : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه : $F(x) = 2\sqrt{\sin x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8 ـــ نضع $u(x) = 2\cos x + 3$ منه $u'(x) = -2\sin x$ أي $\sin x = \dfrac{-1}{2} u'(x)$

إذن : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

منه : $F(x) = -\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2\cos x + 3}) + c$

أي : $F(x) = -\sqrt{2\cos x + 3} + c$ وهي الدالة الأصلية للدالة f

9 ـــ نضع $u(x) = x^3 + x^2$ إذن : $u'(x) = 3x^2 + 2x$

إذن : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه : $F(x) = 2\sqrt{x^3 + x^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10 ـــ نضع $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} = \dfrac{1/x}{\sqrt{\ln x}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـــ 17

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

1 ـــ $I =]1 ; +\infty[$: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

2 ـــ $I = IR$: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

3 ـــ $I = IR$: $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

4 ـــ $I = IR$: $f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$

5 ـــ $I =]0 ; \pi[$: $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

الحل ـــ 17

الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ إذن :

1 ـــ نضع $u(x) = x - 1$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

منه : $F(x) = \ln|x-1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 ـــ نضع $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \dfrac{1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 ـــ نضع $u(x) = e^x + 1$ منه : $u'(x) = e^x$

إذن : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

إذن : $F(x) = \ln|e^x+1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 ـ نضع $u(x) = x^2+x+1$ إذن : $u'(x) = 2x+1$

منه : $f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1} = 3\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right) = 3\left(\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$

إذن : $F(x) = 3\ln|x^2+x+1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 ـ نضع $u(x) = \sin x$ منه : $u'(x) = \cos x$

إذن : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

منه : $F(x) = \ln|\sin x| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـ 18

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ عين الدوال الأصلية للدوال f على المجال I في كل من الحالات التالية :

1 ـ $f(x) = e^{4x+1}$: $I = IR$

2 ـ $f(x) = x\,e^{-x^2}$: $I = IR$

3 ـ $f(x) = \dfrac{3}{x^2}\,e^{1/x}$: $I =]0\,;+\infty[$

4 ـ $f(x) = (\sin x)\,e^{\cos x}$: $I = IR$

5 ـ $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}\,e^{\sqrt{x+1}}$: $I =]-1\,;+\infty[$

الحل ـ 18

حسب الخواص فإن الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

1 ـ نضع $u(x) = 4x+1$ منه : $u'(x) = 4$

إذن : $f(x) = e^{4x+1} = \dfrac{1}{4}(4\,e^{4x+1}) = \dfrac{1}{4}\,u'(x)\,e^{u(x)}$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{4}\,e^{4x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 ـ نضع $u(x) = -x^2$ منه : $u'(x) = -2x$

إذن : $f(x) = x\,e^{-x^2} = \dfrac{-1}{2}(-2x\,e^{-x^2}) = \dfrac{-1}{2}\,u'(x)\,e^{u(x)}$

منه : $F(x) = \dfrac{-1}{2}\,e^{-x^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 ـ نضع $u(x) = 1/x$ منه : $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

إذن : $f(x) = \dfrac{3}{x^2}\,e^{1/x} = -3\left(-\dfrac{1}{x^2}\,e^{1/x}\right) = -3\,u'(x)\,e^{u(x)}$

منه : $F(x) = -3\,e^{1/x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 ـ نضع $u(x) = \cos x$ منه : $u'(x) = -\sin x$

إذن : $f(x) = \sin x\,e^{\cos x} = -(-\sin x\,e^{\cos x}) = -u'(x)\,e^{u(x)}$

منه : $F(x) = -e^{\cos x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 ـ نضع $u(x) = \sqrt{x+1}$ منه : $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

إذن : $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}\,e^{\sqrt{x+1}} = -2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\,e^{\sqrt{x+1}}\right) = -2\,u'(x)\,e^{u(x)}$

منه : $F(x) = -2\,e^{\sqrt{x+1}} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 19

تعرف على الشكل المناسب ثم عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية على المجال I .

1 ــ $f(x) = 2x^3(x^4+2)^3 \quad : \quad I = IR$

2 ــ $f(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} \quad : \quad I =]-\infty\,;-1[$

3 ــ $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right) \quad : \quad I =]-1\,;+\infty[$

4 ــ $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \quad : \quad I =]0\,;\pi/2[$

5 ــ $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}\,e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad : \quad I =]1\,;+\infty[$

الحل ــ 19

1 ــ نضع $u(x) = x^4 + 2$ منه $u'(x) = 4x^3$

إذن : $f(x) = 2x^3(x^4+2)^3 = \dfrac{1}{2}(4x^3)(x^4+2)^3 = \dfrac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{3+1}[u(x)]^{3+1}$ أصلية للدالة $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^3$

إذن : $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}(x^4+2)^4\right) + c$

أي: $F(x) = \dfrac{1}{8}(x^4+2)^4 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 ــ نضع $u(x) = x^2 - 1$ منه $u'(x) = 2x$

إذن : $f(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

الدالة $x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = -\dfrac{3}{2}\left(2\sqrt{x^2-1}\right) + c$

أي: $F(x) = -3\sqrt{x^2-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 ــ نضع $u(x) = x^3 + 1$ إذن : $u'(x) = 3x^2$

إذن : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x^2}{x^3+1}\right) = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

إذن: $F(x) = \dfrac{1}{6}\ln|x^3+1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 ــ نضع $u(x) = \cos x$ إذن $u'(x) = -\sin x$

منه : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = -\left(\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}\right) = -\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right)$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي الدالة الأصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = -\left(-\dfrac{1}{\cos x}\right) + c$

أي: $F(x) = \dfrac{1}{\cos x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 ــ نضع $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ منه $u'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

إذن : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\ e^{\frac{x+1}{x-1}} = -\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\ e^{\frac{x+1}{x-1}}\right) = -u'(x)\,e^{u(x)}$

الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية لــ $x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

إذن : $F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـــ 20

عين دالة أصلية على IR لكل من الدوال التالية :

1 ـ $f(x) = \sin^2 x$

2 ـ $f(x) = \cos^2 x$

3 ـ $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

الحــل ـــ 20

1 ـ $f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

بما أن : $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي دالة أصلية لــ $x \longmapsto \frac{1}{2}$

$x \longmapsto \sin 2x$ هي دالة أصلية لــ $x \longmapsto 2\cos 2x$

فإن : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2\cos 2x)$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ هي دالة أصلية لــ f

2 ـ $f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

منه : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2\cos 2x)$

بما أن : $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ أصلية لــ $x \longmapsto \frac{1}{2}$ ، $x \longmapsto \sin 2x$ أصلية لــ $x \longmapsto 2\cos 2x$

فإن : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ هي الدالة الأصلية لــ f

3 ـ $f(x) = \sin x \cos x$

نضع $u(x) = \sin x$ إذن : $u'(x) = \cos x$

منه : $f(x) = u'(x) \times u(x)$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$ هي الدالة الأصلية لــ f

التمرين ـــ 21

حل في المجال I المعادلات التفاضلية التالية :

1 ـ $I = IR\ :\ y' = 2x^2 + x - 1$

2 ـ $I = IR^*:\ y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

3 ـ $I = IR\ :\ y' = 3\sin(2x)$

4 ـ $I = IR\ :\ y' = 4x^3 - 3x^2 - 1$

الحــل ـــ 21

البحث عن حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هو البحث عن الدالة F الأصلية للدالة f على IR حيث $F'(x) = f(x)$ أي : $F'(x) = y'$ منه : $y = F$ كمايلي :

1 ـ $y' = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 - x + c$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$

2 — $y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 2x + 1 - x^{-2}$

$$\Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + x - \left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right) + c$$

$$\Rightarrow y = x^2 + x + \frac{1}{x} + c$$

3 — $y' = 3\sin(2x) \Rightarrow y = 3\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + c$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}\cos 2x + c$$

4 — $y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow y = x^4 - x^3 - x + c$

التمرين — 22

حل المعادلات التفاضلية التالية على المجال I :

1 — $I = IR^* \; : \; y'' = \frac{x^2+1}{x^2}$

2 — $I = IR \; : \; y'' = \cos(2x+3)$

3 — $I = IR \; : \; y'' = \cos 2x - 2\sin x$

4 — $I = IR^* \; : \; y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2}$

الحـل — 22

1 — $y'' = \frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow y'' = 1 + x^{-2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = 1 + x^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = 1 + x^{-2} \end{cases}$$ لأن $g'(x) = y''$ (g دالة أصلية لـ $x \longmapsto 1 + x^{-2}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = x + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = x - \frac{1}{x} + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = x - \frac{1}{x} + c$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + cx + d$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

2 — $y'' = \cos(2x+3) \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \cos(2x+3) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \cos(2x+3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+3)\right] + cx + d$$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{4}\cos(2x+3) + cx + d$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

3 – $y'' = \cos 2x - 2\sin x \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \cos 2x - 2\sin x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \cos 2x - 2\sin x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 2\cos x + c \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\sin 2x + 2\cos x + c$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}\cos 2x + 2\sin x + cx + d$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

4 – $y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = x^2 + x + \frac{1}{x^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x^4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \ln|x| + cx + d$

$\Rightarrow y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \ln|x| + cx + d$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

التمرين – 23

حل المعادلات التفاضلية التالية في IR :

1 – $y'' + y = 0$

2 – $y'' + 9y = 0$

3 – $4y'' + \pi^2 y = 0$

الحـل – 23

حلول المعادلة $y'' + w^2 y = 0$ هي الدوال من الشكل $y = a\cos wx + b\sin wx$ كمايلي :

1 – $y'' + y = 0 \Rightarrow y'' + (1)^2 y = 0$

$\Rightarrow y = a\cos x + b\sin x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

2 – $y'' + 9y = 0 \Rightarrow y'' + (3)^2 y = 0$

$\Rightarrow y = a\cos 3x + b\sin 3x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

3 – $4y'' + \pi^2 y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0$

$\Rightarrow y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$

$\Rightarrow y = a\cos\frac{\pi}{2}x + b\sin\frac{\pi}{2}x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

التمرين – 24

حل المعادلة التفاضلية $4y'' + 121y = 0$ ثم عين الحل F الذي يحقق الشرطين $\begin{cases} F(\pi) = 1 \\ F'(\pi) = 2 \end{cases}$

الحل ــ 24

$$4y'' + 121y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{121}{4}y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \left(\frac{11}{2}\right)^2 y = 0$$

$$\Rightarrow y = a\cos\frac{11}{2}x + b\sin\frac{11}{2}x$$

إذن : $F(x) = a\cos\frac{11}{2}x + b\sin\frac{11}{2}x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

لدينا : $F(\pi) = a\cos\frac{11}{2}\pi + b\sin\frac{11}{2}\pi$

$$= 0 + b\sin\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= b\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -b$$

إذن : الشرط $F(\pi) = 1$ يصبح : $-b = 1$ أي : $b = -1$

و لدينا أيضا : $F'(x) = \frac{-11}{2}a\sin\frac{11}{2}x + \frac{11}{2}b\cos\frac{11}{2}x$

منه : $F'(\pi) = \frac{-11}{2}a\sin\frac{11}{2}\pi + \frac{11}{2}b\cos\frac{11}{2}\pi$

$$= \frac{-11}{2}a(-1)$$

$$= \frac{11}{2}a$$

إذن : الشرط $F'(\pi) = 2$ يصبح : $\frac{11}{2}a = 2$ أي : $a = \frac{4}{11}$

نتيجة : $a = \frac{4}{11}$ ؛ $b = -1$ إذن : $F(x) = \frac{4}{11}\cos\frac{11}{2}x - \sin\frac{11}{2}x$

التمرين ــ 25

1 ــ حل المعادلة التفاضلية $9y'' + 4y = 0$ .... (1)

2 ــ عين الحل الخاص F للمعادلة (1) و الذي يحقق الشرطين التاليين :

(1) منحنى الدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$
(2) منحنى الدالة F يقبل مماس عند النقطة A معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $F(x) = 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

4 ــ حل المعادلة $F(x) = 0$ ثم مثل صور الحلول على الدائرة المثلثية .

الحل ــ 25

1 ــ $9y'' + 4y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{4}{9}y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \left(\frac{2}{3}\right)^2 y = 0$$

$$\Rightarrow y = a\cos\frac{2}{3}x + b\sin\frac{2}{3}x$$

2 ــ F حل المعادلة (1) إذن : $F(x) = a\cos\frac{2}{3}x + b\sin\frac{2}{3}x$ حيث a و b أعداد حقيقية نبحث عنها حسب الشروط كمايلي :

منحنى الدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$ إذن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

لدينا : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\cos\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}$

$= a\cos\frac{\pi}{3} + b\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}$

إذن : الشرط $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ يصبح : $\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

أي : (α).......... $a + b\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

من جهة أخرى : $F'(x) = \frac{-2a}{3}\sin\frac{2}{3}x + \frac{2b}{3}\cos\frac{2}{3}x$

منه : $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2a}{3}\sin\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2} + \frac{2b}{3}\cos\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}$

$= \frac{-2a}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2b}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{-2a}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2b}{3}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{-a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{3}$

إذن : الشرط معامل توجيه المماس عند النقطة A هو $-\frac{2}{3}$ يصبح : $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

أي : $\frac{-a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{3} = -\frac{2}{3}$ أي : (β).......... $a\sqrt{3} - b = 2$

لنحل إذن الجملة : $\begin{cases} a + b\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \\ a\sqrt{3} - b - 2 = 0 \end{cases}$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4$$

إذن : $\begin{cases} a = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3} \\ b = \dfrac{\begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{-6+2}{-4} = 1 \end{cases}$

خلاصة : $a = \sqrt{3}$ ؛ $b = 1$

إذن : $F(x) = \sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x + \sin\frac{2}{3}x$ و هو المطلوب

3 ـــ لدينا : $F(x) = \sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x + \sin\frac{2}{3}x$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}x\right)$

$= 2\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{2}{3}x\right) + \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{2}{3}x\right)\right]$

$= 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ و هو المطلوب

4 ـــ $F(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{حيث } k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{8}{12}\pi + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x = \frac{-4}{12}\pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \times \frac{8}{12}\pi + \frac{3}{2} \times 2\pi k \\ \text{أو} \\ x = \frac{-3}{2} \times \frac{4}{12}\pi + \frac{3}{2} \times 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 3\pi k \\ \text{أو} \\ x = \frac{-\pi}{2} + 3\pi k \end{cases}$$ و هي حلول المعادلة $F(x) = 0$ في IR

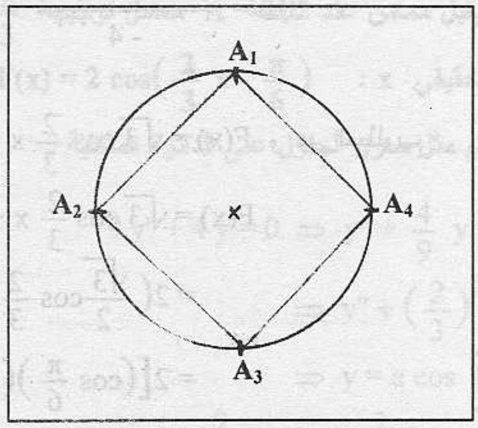
الحلول على الدائرة المثلثية

من أجل $k = 0$: $\begin{cases} x = \pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

من أجل $k = 1$: $\begin{cases} x = \pi + 3\pi = 4\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{5}{2}\pi \end{cases}$

من أجل $k = 2$: $\begin{cases} x = \pi + 6\pi = 7\pi & \text{نتوقف} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 6\pi & \text{نتوقف} \end{cases}$

إذن : صور حلول المعادلة على الدائرة المثلثية هي النقط A_1 ؛ A_2 ؛ A_3 ؛ A_4 كمايلي :



التمرين ـــ 26

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; 1[$ بـــ $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2(x-1)^2}$

1 ـــ عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل x من $]0 ; 1[$:

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2 ـ إستنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0\,;1[$ تحقق $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$

الحـل ـ 26

1 ـ من أجل كل x من $]0\,;1[$ لدينا : $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{a(x^2-2x+1)+bx^2}{x^2(x-1)^2}$

$$= \frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ نحصل على $\begin{cases} a+b=0\\ -2a=2\\ a=-1\end{cases}$

أي $\begin{cases} b=-a\\ a=-1\\ a=-1\end{cases}$ أي $\begin{cases} b=1\\ a=-1\end{cases}$

نتيجة : من أجل كل x من $]0\,;1[$: $f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

2 ـ لدينا : $f(x) = \frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2} = -(x^{-2}) + (x-1)^{-2}$

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$ أصلية للدالة $x\longmapsto x^{-2}$

الدالة $x\longmapsto \frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1} = \frac{-1}{x-1}$ أصلية للدالة $x\longmapsto (x-1)^{-2}$

منه الدالة : $x\longmapsto -\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية لــ $x\longmapsto -x^{-2}+(x-1)^{-2}$

أي : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت يمكن البحث عنه بحساب $F\left(\frac{1}{2}\right)$ كمايلي :

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=6 \Leftrightarrow \frac{1}{1/2} - \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} + c = 6$$

$$\Leftrightarrow c = 6-2-2$$

$$\Leftrightarrow c=2$$

نتيجة : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}+2$

تحقيق : $F(x) = \frac{x-1-x+2x(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x^2-2x-1}{x(x-1)}$

$$F'(x)=\frac{(4x-2)x(x-1)-(2x-1)(2x^2-2x-1)}{x^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)[2x(x-1)-2x^2+2x+1]}{x^2(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

$= f(x)$ إذن : F أصلية لــ f

التمرين ـ 27

f دالة معرفة على $]1\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$

1 ـ عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x+1)^3}$

2 ـ إستنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1\,;+\infty[$

3 ـ إستنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق : $F(0) = 1$

الحـل ـ 27

1 ـ من أجل كل x من $]1 ; +\infty[$:

$$\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)^3 + b(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$= \frac{a(x^3+3x^2+3x+1) + b(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{(a+b)x^3 + 3(a-b)x^2 + 3(a+b)x + a - b}{(x^2-1)^3}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ a-b=0 \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} a=1/2 \\ b=1/2 \end{matrix}\right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)^3} + \dfrac{1}{2(x+1)^3}$

2 ـ الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$ من الشكل $x \longmapsto (x+1)^{-3}$ إذن : الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{-3+1}(x+1)^{-3+1} = \dfrac{-1}{2(x+1)^2}$

هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$ من الشكل $x \longmapsto (x-1)^{-3}$ إذن : الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{-3+1}(x-1)^{-3+1} = \dfrac{-1}{2(x-1)^2}$

هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$

منه : الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2(x-1)^2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2(x+1)^2}\right) + c$ هي دالة أصلية

للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{2(x+1)^3} + \dfrac{1}{2(x-1)^3}$

أي : $F(x) = \dfrac{-1}{4(x-1)^2} - \dfrac{1}{4(x+1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

3 ـ $F(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{4} - \dfrac{1}{4} + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 1/2$

منه : $F(x) = \dfrac{-1}{4(x-1)^2} - \dfrac{1}{4(x+1)^2} + \dfrac{1}{2}$ هي الدالة الأصلية المطلوبة .

التمرين ـ 28

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

1 ـ أكتب f(x) من الشكل $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1 ; +\infty[$

الحـل ـ 28

1 ـ $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} = \dfrac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} = \dfrac{ax+a+b}{(x+1)^2}$

بالمطابقة مع $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a=1 \\ a+b=2 \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=-1 \end{matrix}\right\}$

نتيجة : $f(x) = \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2 ـ الدالة $x \longmapsto \ln|x+1|$ أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{x+1}$ أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$

منه : الدالة $x \longmapsto 3\ln|x+1| - \left(\frac{-1}{x+1}\right) + c$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

أي : $F(x) = 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 29

عين دالة أصلية للدالة $f : x \longmapsto \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ على $]1 ; +\infty[$

الحل ــ 29

لنبسط عبارة $f(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x & x^2 - 2x + 1 \\ \underline{x^2 - 2x + 1} & \overline{1} \\ -1 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

منه : $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 30

عين دالة أصلية للدالة $f : x \longmapsto \frac{3x^2 + 4x - 25}{x^2 + x - 6}$ على $]-3 ; 2[$

الحل ــ 30

لنبسط عبارة $f(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 4x - 25 & x^2 + x - 6 \\ \underline{3x^2 + 3x - 18} & \overline{3} \\ x - 7 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 3 + \frac{x-7}{x^2 + x - 6}$

لاحظ أن : $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$

إذن : $f(x) = 3 + \frac{x-7}{(x+3)(x-2)}$

لنبحث عن الأعداد a و b حيث $\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} = \frac{x-7}{(x+3)(x-2)}$

$$\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} = \frac{ax - 2a + bx + 3b}{(x+3)(x-2)} = \frac{(a+b)x + 3b - 2a}{(x+3)(x-2)}$$

بالمطابقة مع العبارة $\frac{x-7}{(x+3)(x-2)}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l} a + b = 1 \\ -2a + 3b = -7 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} 3a + 3b = 3 \\ -2a + 3b = -7 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} 5a = 10 \\ b = 1 - a \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}\right\}$ منه : $\frac{x-7}{(x+3)(x-2)} = \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x-2)}$

نتيجة : $f(x) = 3 + \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x-2)}$

منه : $F(x) = 3x + 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين ــ 31

عين دالة أصلية للدالة $f : x \longmapsto \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$ على $]-\infty ; -1[$

الحل ــ 31

لنبسط عبارة $f(x)$ كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\ \underline{2x^2 + 2x} & \overline{2x + 1} \\ x + 2 & \\ \underline{x + 1} & \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$

منه : $F(x) = x^2 + x + \ln|x+1| + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين – 32

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \cos^3 x$

1 – تحقق أن : $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحل – 32

1 – من أجل كل x من IR :
$$\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x(\cos^2 x) = \cos^3 x = f(x)$$
و هو المطلوب

2 – الدالة $x \longmapsto \sin x$ أصلية لـ $x \longmapsto \cos x$

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$ أصلية لـ $x \longmapsto \cos x \sin^2 x$

إذن : الدالة $x \longmapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين – 33

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin x + \sin^3 x$

1 – تحقق أن : $f(x) = 2\sin x - \sin x \cos^2 x$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f

الحل – 33

1 –
$$2\sin x - \sin x \cos^2 x = \sin x + \sin x - \sin x \cos^2 x = \sin x + \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x + \sin x \sin^2 x = \sin x + \sin^3 x = f(x)$$
و هو المطلوب

2 – الدالة $x \longmapsto -\cos x$ أصلية لـ $x \longmapsto \sin x$

الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x$ أصلية لـ $x \longmapsto \sin x \cos^2 x$

منه : الدالة $x \longmapsto -2\cos x - \left(-\frac{1}{3}\cos^3 x\right) + c$ أصلية لـ $x \longmapsto 2\sin x - \sin x \cos^2 x$

أي الدالة : $x \longmapsto -2\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ أصلية للدالة f

التمرين – 34

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$

1 – عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x :
$$f(x) = \sin x(a\cos^2 x + b\cos^4 x)$$

2 – إستنتج دالة أصلية لـ f

الحل – 34

1 –
$$f(x) = \sin^3 \cos^2 x = \sin x(\sin^2 x \cos^2 x) = \sin x(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x)$$
إذن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

2 – لدينا : $f(x) = \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x)$

أي : $f(x) = \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$

الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x$ أصلية لـ $x \longmapsto \sin x \cos^2 x$

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{5}\cos^5 x$ أصلية لـ $x \longmapsto -\sin x \cos^4 x$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$ أصلية للدالة f

التمرين ــ 35

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$

1 ــ أكتب f(x) على الشكل : $\cos x(a \sin^4 x + b \sin^6 x + c \sin^8 x)$ حيث a , b , c أعداد حقيقية .

2 ــ إستنتج دالة أصلية لــ f

الحـل ــ 35

1 ــ

$$f(x) = \text{six}^4 x \cos^5 x$$
$$= \cos x \sin^4 x \cos^4 x$$
$$= \cos x \sin^4 x(1 - \sin^2 x)^2$$
$$= \cos x \sin^4 x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$$

$= \cos x(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x)$ و هو المطلوب

2 ــ لدينا : $f(x) = \cos x(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x)$

أي : $f(x) = \cos x \sin^4 x - 2\cos x \sin^6 x + \cos x \sin^8 x$

منه : $F(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + c$ هي دالة أصلية لــ f

التمرين ــ 36

u و v دالتان معرفتان على $I = [0 ; \pi/4]$ كمايلي $u(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$

1 ــ تحقق أن من أجل كل x من I : $u'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2 ــ أوجد دالة أصلية V للدالة v على I و التي تنعدم من أجل 0

الحـل ــ 36

1 ــ

$$u'(x) = \frac{\cos x \cos^3 x + 3\sin x \cos^2 x \sin x}{(\cos^3 x)^2}$$
$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x - 3\cos^4 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{3\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^6 x}$$

$= \dfrac{3}{\cos^4 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ و هو المطلوب

2 ــ حسب السؤال (1) : $u'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

منه : $u'(x) - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^4 x}$

أي : $\dfrac{1}{3}u'(x) - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^4 x}$

أي : $\dfrac{1}{3}u'(x) - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = v(x)$

إذن : الدالة الأصلية للدالة v هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{3}u'(x) - \dfrac{1}{3\cos^2 x}$

منه : $V(x) = \dfrac{1}{3}u(x) - \dfrac{1}{3}\tan x + c$

أي : $V(x) = \dfrac{\sin x}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{3}\tan x + c$ حيث $c \in IR$

البحث عن c :

$$V(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 0}{3\cos^3 0} - \frac{1}{3}\tan 0 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 0$$

نتيجة : $V(x) = \dfrac{\sin x}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{3}\tan x$

التمرين ــ 37

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x\cos x$

1 ــ أثبت أن : $f(x) + f''(x) = -2\sin x$

2 ــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحـل ــ 37

1 ــ $f'(x) = \cos x - x\sin x$

$f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x$ منه : $f''(x) = -2\sin x - f(x)$

أي : $f''(x) + f(x) = -2\sin x$ و هو المطلوب .

2 ــ لدينا : $f''(x) + f(x) = -2\sin x$

إذن : $f(x) = -f''(x) - 2\sin x$

أي : الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto -f''(x) - 2\sin x$

منه : $F(x) = -f'(x) + 2\cos x + c$

أي : $F(x) = -\cos x + x\sin x + 2\cos x + c$

أي : $F(x) = \cos x + x\sin x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

تحقيق : $F'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x = f(x)$

التمرين ــ 38

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x\sin x$

1 ــ تحقق أن f تقبل دالة أصلية F من الشكل : $F(x) = a\,x\cos x + b\sin x$

2 ــ عين F حيث $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

الحـل ــ 38

1 ــ لتكن F معرفة بـ $F(x) = a\,x\cos x + b\sin x$

إذن : $F'(x) = a\cos x - a\,x\sin x + b\cos x$

أي : $F'(x) = (a + b)\cos x - a\,x\sin x$

أي : $F'(x) = (a + b)\cos x - a\,f(x)$

إذن : يكفي أن يكون $a + b = 0$ و $-a = 1$ حتى تكون $F'(x) = f(x)$ أي F دالة أصلية لـ f على R

أي : $\left.\begin{matrix} a = -1 \\ b = 1 \end{matrix}\right\}$ منه : $F(x) = -x\cos x + \sin x$

نتيجة : الدوال الأصلية لـ f على IR هي دوال من الشكل : $F(x) = -x\cos x + \sin x + c$

2 ــ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = -1$$

نتيجة : $F(x) = -x\cos x + \sin x - 1$

التمرين ــ 39

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 e^{2x}$

1 ــ عين الأعداد الحقيقية a , b , c حيث تكون الدالة F المعرفة على IR

بـ $F(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$ أصلية لـ f

2 ــ إستنتج دالة أصلية ϕ للدالة f تنعدم من أجل $x = 0$

الحـل ــ 39

1 ــ تكون F دالة أصلية لـ f إذا و فقط إذا كان $F'(x) = f(x)$ من أجل كل x من IR

$$F'(x) = (2\,a\,x + b)\,e^{2x} + 2(a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$$
$$= [2\,a\,x^2 + (2\,a + 2b)\,x + b + 2\,c]\,e^{2x}$$

بالمطابقة مع $f(x) = x^2 e^{2x}$ نحصل على $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$

نتيجة : $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ دالة أصلية لـ f

2 ــ لتكن ϕ دالة أصلية لـ f إذن : $\phi(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + c$ حيث $c \in IR$

$$\phi(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -1/4$$

منه : $\phi(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} - \frac{1}{4}$

تحقيق : $\phi'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$

$$= \left(x - \frac{1}{2} + x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}$$

$$= x^2 e^{2x}$$

$$= f(x)$$

التمرين ــ 40

عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال D

1 ــ $f(x) = \sqrt{x}$: $D =]0 ; +\infty[$

2 ــ $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$: $D = IR$

3 ــ $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$: $D =]-1 ; +\infty[$

الحـل ــ 40

1 ــ $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ إذن : $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

2 ــ $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = x(x^2+1)^{1/2}$

نضع : $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \frac{1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^{1/2}$

منه : $F(x) = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}[u(x)]^{\frac{1}{2}+1}\right) + c$

أي : $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u(x)\sqrt{u(x)}\right) + c$

أي : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c$

3 ــ $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} = (x+1)^{1+\frac{1}{2}}$

نضع $u(x) = x + 1$ إذن : $u'(x) = 1$

منه : $f(x) = u'(x)[u(x)]^{1+\frac{1}{2}}$

إذن : $F(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+1}[u(x)]^{1+\frac{1}{2}+1} + c$

أي : $F(x) = \frac{2}{5}[u(x)]^2\sqrt{u(x)} + c$

أي : $F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} + c$

التمرين – 41

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$

1 – عين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(x) = e^x + a + \dfrac{b\,e^x}{e^x - 1}$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$

الحل – 41

1 – $$e^x + a + \frac{b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - e^x + a\,e^x - a + b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} + (a + b - 1)\,e^x - a}{e^x - 1}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l} a + b - 1 = 1 \\ -a = -1 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right\}$

نتيجة : $f(x) = e^x + 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

2 – $f(x) = e^x + 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ إذن : $F(x) = e^x + x + \ln|e^x - 1| + c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين – 42

f دالة معرفة على $]2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right|$

1 – عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $]-a ; +\infty[$ بـ $g(x) = (x + a)\ln|x + a| - x$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة $h : x \longmapsto \ln|x + a|$ على $]-a ; +\infty[$

3 – إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]2 ; +\infty[$

الحل – 42

1 – $$g'(x) = \ln|x + a| + (x + a) \times \frac{1}{x + a} - 1 = \ln|x + a| + 1 - 1 = \ln|x + a|$$

2 – لدينا : $g'(x) = \ln|x + a|$ أي $g'(x) = h(x)$

منه : g هي دالة أصلية لـ h على $]-a ; +\infty[$

3 – $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| = \ln|x - 2| - \ln|x + 2|$

حسب السؤال (1) فإن :

$\left.\begin{array}{l} \text{الدالة } x \longmapsto (x - 2)\ln|x - 2| - x \text{ أصلية لـ } x \longmapsto \ln|x - 2| \\ \text{الدالة } x \longmapsto (x + 2)\ln|x + 2| - x \text{ أصلية لـ } x \longmapsto \ln|x + 2| \end{array}\right\}$

إذن : الدالة $x \longmapsto (x - 2)\ln|x - 2| - x - [(x + 2)\ln|x + 2| - x]$

أصلية للدالة $x \longmapsto \ln|x - 2| - \ln|x + 2|$

أي الدالة $x \longmapsto (x - 2)\ln|x - 2| - (x + 2)\ln|x + 2| + c$ أصلية للدالة f

التمرين – 43

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{6\,e^x}{e^{2x} - 1}$

1 – عين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(x) = \dfrac{a\,e^x}{e^x - 1} + \dfrac{b\,e^x}{e^x + 1}$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$

الحل – 43

1 – $$\frac{a\,e^x}{e^x - 1} + \frac{b\,e^x}{e^x + 1} = \frac{a\,e^{2x} + a\,e^x + b\,e^{2x} - b\,e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{(a + b)\,e^{2x} + (a - b)\,e^x}{e^{2x} - 1}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{6 e^x}{e^{2x} - 1}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l} a + b = 0 \\ a - b = 6 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} 2a = 6 \\ b = -a \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -3 \end{array}\right\}$

نتيجة : $f(x) = \frac{3 e^x}{e^x - 1} - \frac{3 e^x}{e^x + 1}$

2 ــ الدالة $x \longmapsto \ln|e^x - 1|$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$

الدالة $x \longmapsto \ln|e^x + 1|$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$

إذن : الدالة $x \longmapsto 3\ln|e^x - 1| - 3\ln|e^x + 1| + c$ هي دالة أصلية لـ f

التمرين ــ 44

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 ــ تحقق أن من أجل كل x من IR : $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

3 ــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحل ــ 44

1 ــ

$$f'(x) = (4x - 7)e^x + (2x^2 - 7x + 5)e^x$$
$$= (2x^2 - 7x + 5 + 4x - 7)e^x$$
$$= (2x^2 - 3x - 2)e^x$$
$$f''(x) = (4x - 3)e^x + (2x^2 - 3x - 2)e^x$$
$$= (2x^2 - 3x - 2 + 4x - 3)e^x$$
$$= (2x^2 + x - 5)e^x$$

2 ــ من أجل كل x من IR فإن :

$$4e^x + 2f'(x) - f''(x) = 4e^x + 2(2x^2 - 3x - 2)e^x - (2x^2 + x - 5)e^x$$
$$= (4 + 4x^2 - 6x - 4 - 2x^2 - x + 5)e^x$$
$$= (2x^2 - 7x + 5)e^x$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب

3 ــ حسب السؤال السابق فإن : $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

الدالة $x \longmapsto 4e^x$ أصلية لـ $x \longmapsto 4e^x$

الدالة $x \longmapsto f(x)$ أصلية لـ $x \longmapsto f'(x)$

الدالة $x \longmapsto f'(x)$ أصلية لـ $x \longmapsto f''(x)$

منه الدالة $x \longmapsto 4e^x + 2f(x) - f'(x) + c$ أصلية لـ f

أي الدالة $x \longmapsto 4e^x + 2(2x^2 - 7x + 5)e^x - (2x^2 - 3x - 2)e^x + c$ أصلية للدالة f

أي الدالة $x \longmapsto (4 + 4x^2 - 14x + 10 - 2x^2 + 3x + 2)e^x + c$ أصلية للدالة f

أي الدالة $x \longmapsto (2x^2 - 11x + 16)e^x + c$ أصلية للدالة f

تحقيق : نضع $F(x) = (2x^2 - 11x + 16)e^x + c$

إذن : $F'(x) = (4x - 11)e^x + (2x^2 - 11x + 16)e^x$

أي : $F'(x) = (2x^2 - 11x + 16 + 4x - 11)e^x$

أي : $F'(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$

أي : $F'(x) = f(x)$

التمرين ــ 45

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^x \cos x$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 ــ أوجد العددين a و b حيث من أجل كل x من IR : $f(x) = a f''(x) + b f'(x)$

3 ــ إستنتج دالة أصلية F للدالة f على IR

الحل ــ 45

1 ــ

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$
$$f''(x) = (e^x \cos x - e^x \sin x) - (e^x \sin x + e^x \cos x)$$
$$= -2e^x \sin x$$

2 ــ لدينا : $f(x) = e^x \cos x$ و $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

إذن : $f'(x) = f(x) - e^x \sin x$

أي : $e^x \sin x = f(x) - f'(x)$

نعوض $e^x \sin x$ بــ $f(x) - f'(x)$ في عبارة $f''(x)$ فنحصل على :

$$f''(x) = -2\,(f(x) - f'(x))$$

أي : $f''(x) = -2 f(x) + 2 f'(x)$

أي : $2 f(x) = 2 f'(x) - f''(x)$

منه : $f(x) = f'(x) - \frac{1}{2} f''(x)$ و هو المطلوب

نتيجة : $a = -1/2$ ؛ $b = 1$

3 ــ الدالة $x \longmapsto f(x)$ هي دالة أصلية لــ $x \longmapsto f'(x)$

الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{2} f'(x)$ هي دالة أصلية لــ $x \longmapsto -\frac{1}{2} f''(x)$

منه : الدالة $F : x \longmapsto f(x) - \frac{1}{2} f'(x) + c$ هي دالة أصلية لــ f

إذن : $F(x) = e^x \cos x - \frac{1}{2}(e^x \cos x - e^x \sin x) + c$

$$= \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + c$$

$$= \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + c$$ هي دالة أصلية لــ f

تحقيق : $F'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x - \frac{1}{2}(-2 e^x \sin x)$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x$$

$$= e^x \cos x$$

$$= f(x)$$

التمرين ــ 46

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = x^3 e^{2x}$

أوجد دالة أصلية F للدالة f على IR حيث $F(x) = p(x)\, e^{2x}$ و p كثير حدود من الدرجة الثالثة .

الحــل ــ 46

ليكن $p(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ حيث a ؛ b ؛ c ؛ d أعداد حقيقية و $a \neq 0$

نضع : $F(x) = p(x)\, e^{2x}$

إذن : $F'(x) = (3 a x^2 + 2 b x + c)\, e^{2x} + 2(a x^3 + b x^2 + c x + d)\, e^{2x}$

أي : $F'(x) = (2 a x^3 + 2 b x^2 + 2 c x + 2 d + 3 a x^2 + 2 b x + c)\, e^{2x}$

أي : $F'(x) = [2 a x^3 + (2 b + 3 a) x^2 + (2 c + 2 b) x + 2 d + c]\, e^{2x}$

حتى تكون F دالة أصلية لــ f يكفي و يلزم أن يتحقق أن من أجل كل x من IR

$F'(x) = f(x)$ أي $F'(x) = x^3 e^{2x}$

إذن بالمطابقة نحصل على $\begin{cases} 2 a = 1 \\ 2 b + 3 a = 0 \\ 2 c + 2 b = 0 \\ 2 d + c = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3/4 \\ c = 3/4 \\ d = -3/8 \end{cases}$

نتيجة : $F(x) = \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right) e^{2x}$

تحقيق : $F'(x) = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}\right) e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right) e^{2x}$

$$= \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}\right) e^{2x}$$

$$= x^3 e^{2x}$$

$$= f(x)$$

التمرين ــ 47

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (a \cos \theta x + b \sin \theta x)\, e^{\lambda x}$

حيث λ ؛ θ ؛ a ؛ b أعداد حقيقية ثابتة .

1 ــ أحسب $f'(x)$

لتكن g الدالة المعرفة على IR بـ $g(x) = (\sin x - 5 \cos x)\, e^{-x}$

2 ــ باستعمال نتيجة السؤال (1) عين دالة أصلية G للدالة g و التي تحقق $G(0) = 3$

الحــل ــ 47

1 ــ $f'(x) = (-a\theta \sin \theta x + b\theta \cos \theta x)\, e^{\lambda x} + \lambda (a \cos \theta x + b \sin \theta x)\, e^{\lambda x}$

$= (a\lambda \cos \theta x + b\lambda \sin \theta x - a\theta \sin \theta x + b\theta \cos \theta x)\, e^{\lambda x}$

$= [(a\lambda + b\theta) \cos \theta x + (b\lambda - a\theta) \sin \theta x]\, e^{\lambda x}$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن الدالة $x \longmapsto (a \cos \theta x + b \sin \theta x)\, e^{\lambda x} + c$

هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto [(a\lambda + b\theta) \cos \theta x + (b\lambda - a\theta) \sin \theta x]\, e^{\lambda x}$

نضع : $\left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ a\lambda + b\theta = -5 \\ b\lambda - a\theta = 1 \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ -a + b = -5 \\ -b - a = 1 \end{array}\right.$ منه $\left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{array}\right.$

منه : الدالة $x \longmapsto (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x} + c$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto [-5 \cos x + \sin x]\, e^{-x}$

أي : $G(x) = (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x} + c$ حيث c ثابت حقيقي نبحث عنه كمايلي :

$G(0) = 3 \Rightarrow (2\cos(0) - 3\sin(0))\, e^{0} + c = 3$

$\Rightarrow 2 + c = 3$

$\Rightarrow c = 1$

نتيجة : $G(x) = (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x} + 1$

تحقيق : $G'(x) = (-2 \sin x - 3 \cos x)\, e^{-x} - (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x}$

$= (-2 \sin x - 3 \cos x - 2 \cos x + 3 \sin x)\, e^{-x}$

$= (\sin x - 5 \cos x)\, e^{-x}$

$= g(x)$

التمرين ــ 48

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{-x} \sin x$

1 ــ أحسب المشتقات المتتابعة للدالة f إلى غاية الرتبة 4 (نرمز لها f' ؛ f'' ؛ $f^{(3)}$ ؛ $f^{(4)}$)

2 ــ أوجد علاقة بين الدالة f و مشتقتها $f^{(4)}$ (ذات الرتبة 4)

3 ــ إستنتج دالة أصلية F للدالة f على IR

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = F[(2n+1)\pi] - F[2\pi n]$

4 ــ أحسب u_0

5 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi} + 1)$

6 ــ بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب أساسها

7 ــ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحــل ــ 48

1 ــ $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$f''(x) = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -2 e^{-x} \cos x$

$f^{(3)}(x) = 2 e^{-x} \cos x + 2 e^{-x} \sin x$

$f^{(4)}(x) = -2 e^{-x} \cos x - 2 e^{-x} \sin x - 2 e^{-x} \sin x + 2 e^{-x} \cos x = -4 e^{-x} \sin x$

2 ــ حسب السؤال السابق لدينا : $f^{(4)}(x) = -4 e^{-x} \sin x$

أي : $f^{(4)}(x) = -4 f(x)$

منه : $f(x) = \dfrac{-1}{4} f^{(4)}(x)$ و هو المطلوب

3 ـ الدالة $x \mapsto f^{(3)}(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto f^{(4)}(x)$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{-1}{4} f^{(3)}(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{-1}{4} f^{(4)}(x)$

منه : $F(x) = \frac{-1}{4} f^{(3)}(x)$

أي : $F(x) = \frac{-1}{4}(2 e^{-x} \cos x + 2 e^{-x} \sin x)$

أي : $F(x) = \frac{-1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x)$

4 ـ من أجل $n = 0$ نحصل على : $u_0 = F(\pi) - F(0)$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-\pi}(\cos \pi + \sin \pi)\right] - \left[\frac{-1}{2} e^{0}(\cos 0 + \sin 0)\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$$

5 ـ ليكن n عدد طبيعي كيفي إذن : $(2n+1)$ عدد فردي و $(2n)$ عدد زوجي .

منه : $\begin{cases} \cos(2n+1)\pi = -1 \\ \sin(2n+1)\pi = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \cos 2n\pi = 1 \\ \sin 2n\pi = 0 \end{cases}$

إذن : $\left.\begin{array}{l} F[(2n+1)\pi] = -\frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi}(-1+0) = \frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi} \\ F[2n\pi] = -\frac{1}{2} e^{-2n\pi}(1+0) = -\frac{1}{2} e^{-2n\pi} \end{array}\right\}$

نتيجة : $F[(2n+1)\pi] - F[2n\pi] = \frac{1}{2} e^{-2n\pi-\pi} - \frac{-1}{2} e^{-2n\pi}$

$$= \frac{1}{2} e^{-2n\pi}(e^{-\pi} + 1)$$

خلاصة : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{2} e^{-2n\pi}(e^{-\pi} + 1)$ و هو المطلوب .

6 ـ لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{2} e^{-2n\pi}(e^{-\pi} + 1)$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)(e^{-2\pi})^n$$

إذن : (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$ و أساسها $e^{-2\pi}$

7 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)(e^{-2\pi})^n$

$= 0$ لأن $0 < e^{-2\pi} < 1$

التمرين ـ 49

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

1 ـ بين أن f زوجية ثم أدرس تغيراتها .

2 ـ بين أن يمكن كتابة $f(x)$ من الشكل : $f(x) = 1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

3 ـ إستنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

لتكن g الدالة المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{-2 . 2\}$ بـ $g(x) = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

نسمي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

4 ـ بين أن g فردية ثم أدرس تغيراتها .

5 ـ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته .

6 ـ أرسم المنحنى (C) .

7 ـ أحسب مشتقة الدالة $h : x \longmapsto (x + a) \ln|x + a| - x$ من أجل $x \neq a$

8 ـ إستنتج دالة أصلية G للدالة g على المجال D

الحل ـ 49

1 ـ من أجل كل x من $IR - \{-2 . 2\}$ فإن $(-x) \in IR - \{-2 . 2\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$$

نتيجة : f دالة زوجية . يمكن اقتصار دراستها على المجال $]0 ; 2[U]2 ; +\infty[$ كمايلي :

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{(2)^2}{x^2 - 4} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{4}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{(2)^2}{x^2 - 4} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

f دالة قابلة للاشتقاق على $IR - \{-2 . 2\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

إذن : $f'(x)$ تتبع إشارة $-8x$ فقط لأن المقام موجب .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-8x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

ملاحظة : تم إستنتاج النهايات على المجال $]-\infty ; 0[$ بالتناظر الى محور التراتيب لأن f دالة زوجية .

2 ـ ليكن : $x \in IR - \{-2 ; 2\}$

$$1 + \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2} = \frac{x^2 - 4 + a(x + 2) + b(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + (a + b)x + 2a - 2b - 4}{x^2 - 4}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ نحصل على $\left\{\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a - 2b - 4 = 0 \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array}\right.$

نتيجة : $f(x) = 1 + \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}$ و هو المطلوب

3 ـ الدالة $x \longmapsto x$ أصلية لـ $x \longmapsto 1$

الدالة $x \longmapsto \ln|x - 2|$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{x - 2}$

الدالة $x \longmapsto \ln|x + 2|$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{x + 2}$

إذن : الدالة $x \longmapsto x + \ln|x - 2| - \ln|x + 2|$ هي دالة أصلية لـ f

أي : $F(x) = x + \ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + c$ هي دالة أصلية للدالة f

4 ـ من أجل كل x من D فإن $(-x) \in D$

$$g(-x) = -x + \ln\left|\frac{-x-2}{-x+2}\right|$$

$$= -x + \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \quad \text{لأن} \quad \frac{-x-2}{-x+2} = \frac{-(x+2)}{-x+2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$= -x - \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| \quad \text{لأن} \quad \ln\left|\frac{a}{b}\right| = -\ln\left|\frac{b}{a}\right|$$

$$= -\left(x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)$$

$= -g(x)$ إذن g دالة فردية .

التغيرات : g معرفة على D

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 2 + \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 2 + \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \ln\left|\frac{x}{x}\right| = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على D و دالتها المشتقة $g'(x) = f(x)$ لأن g هي دالة أصلية للدالة f حسب السؤال (3)

منه جدول إشارة $g'(x)$ هو نفسه جدول إشارة $f(x)$.

إذن : حسب جدول تغيرات الدالة f نستنتج إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ملاحظة : النهايات على المجال $]-\infty ; 0[$ تستنتج بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ لأن الدالة g فردية .

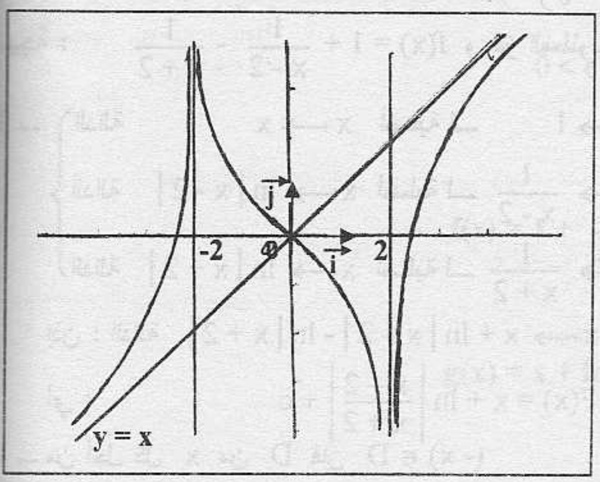
5 ـ $$\lim_{x \to \infty} g(x) - x = \lim_{x \to \infty} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \lim_{x \to \infty} \ln\left|\frac{x}{x}\right| = 0$$

إذن : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

6 ـ **الإنشاء :** لاحظ من جدول تغيرات الدالة g أن $g'(0) = 0$

و الدالة g' لا تغير إشارتها حول 0 إذن النقطة $A(0 ; 0)$

هي نقطة إنعطاف المنحنى (C)



7 – $h'(x) = \ln|x+a| + \frac{1}{x+a}(x+a) - 1$

$= \ln|x+a| + 1 - 1$

$= \ln|x+a|$

إذن : h هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln|x+a|$

8 – الدالة $x \longmapsto (x-2)\ln|x-2| - x$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln|x-2|$

الدالة $x \longmapsto (x+2)\ln|x+2| - x$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln|x+2|$

إذن : الدالة $x \longmapsto (x-2)\ln(x-2) - x - \left[(x+2)\ln|x+2| - x\right]$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

لأن $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \ln|x-2| - \ln|x+2|$

منه : الدالة $x \longmapsto (x-2)\ln(x-2) - (x+2)\ln|x+2|$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

نتيجة : $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2)\ln|x-2| - (x+2)\ln|x+2| + c$ هي دالة أصلية للدالة g .

التمرين – 50

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln x}{2x^2}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

1 – أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

2 – أحسب $f(\sqrt{e})$ ثم أدرس تغيرات الدالة f

3 – عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

4 – أرسم (C)

5 – أثبت أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$

6 – ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد حلول المعادلة : $4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0$

لتكن g دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $g(x) = x + \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x}$

7 – أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ فسر النتيجة هندسيا .

8 – أحسب $g'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة g

9 – عين معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) الممثل للدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

10 – بين أن (γ) يقبل نقطة إنعطاف يطلب إحداثياها .

11 – أحسب $g(1/2) \times g(1)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة $g(x) = 0$ ؟

12 – بين أن (γ) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب معادلته

13 – أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) ثم أرسم (γ)

الحل – 50

1 – f معرفة على $]0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln x}{2x^2} = +\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-\ln x}{x^2} = +\infty \end{array}\right\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{2x} \times \frac{\ln x}{x} = 1$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{2x} = 0 \end{array}\right\}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2 – $f(\sqrt{e}) = 1 + \frac{3}{4e} - \frac{3\ln(e^{1/2})}{2e} = 1 + \frac{3}{4e} - \frac{3}{4e} = 1$

التغيرات :
$$f'(x) = \frac{-8x(3)}{16x^4} - \frac{\frac{3}{x}(2x^2) - 4x(3\ln x)}{4x^4}$$
$$= \frac{-3x}{2x^4} - \frac{6x - 12x\ln x}{4x^4}$$
$$= \frac{-3x - 3x + 6x\ln x}{2x^4}$$
$$= \frac{6x(-1+\ln x)}{2x^4}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-1+\ln x)$ فقط لأن $\left.\begin{matrix}2x^4 > 0\\ x>0\end{matrix}\right\}$ كما يلي :

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

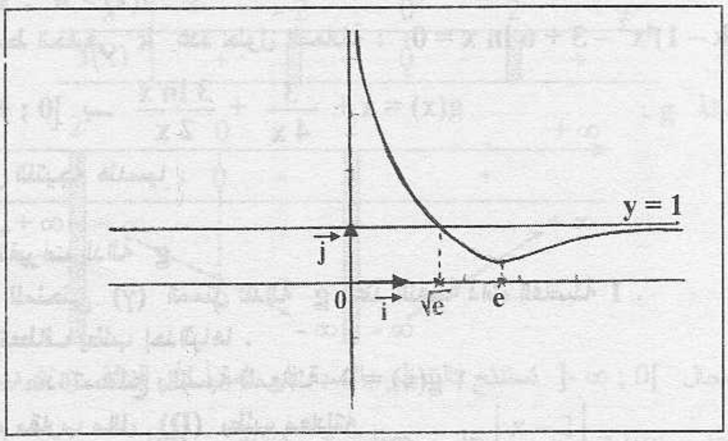
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1 - \frac{3}{4e^2}$	↗	1

$$f(e) = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3\ln e}{2e^2} = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3}{2e^2} = 1 - \frac{3}{4e^2} > 0$$

3 ـ المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) على اليمين عند 0

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 ـ الإنشاء



5 ـ حسب الإنشاء فإن المنحنى (C) يقع دائما فوق محور الفواصل إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

6 ـ ليكن $x > 0$: $4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0 \Leftrightarrow 4kx^2 - 4x^2 - 3 + 6\ln x = 0$
$$\Leftrightarrow 4kx^2 = 4x^2 + 3 - 6\ln x$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{4x^2 + 3 - 6\ln x}{4x^2}$$
$$\Leftrightarrow k = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{2x^2}\ln x$$
$$\Leftrightarrow k = f(x)$$

إذن : عدد حلول المعادلة $4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0$ هو عدد نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$ مع المنحنى (C) الممثل للدالة f كمايلي :

لما $k \in \left]-\infty ; 1 - \frac{3}{4e^2}\right[$: لا يوجد نقط تقاطع إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

لما $k = 1 - \frac{3}{4e^2}$: يوجد نقطة تقاطع واحدة إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $x = e$

لما $k \in \left]1 - \frac{3}{4e^2} ; 1\right[$: يوجد نقطتي تقاطع إذن : المعادلة تقبل حلين مختلفين

لما $k \in [1 ; +\infty[$: يوجد نقطة تقاطع واحدة إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

7 –
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}\left[x^2 + \frac{3}{4} + 3\ln x\right]$$
$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لمنحنى الدالة g عند 0 على اليمين .

8 –
$$g'(x) = 1 + \frac{-12}{16x^2} + \frac{\frac{3}{x}(2x) - 6\ln x}{4x^2}$$
$$= 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{6 - 6\ln x}{4x^2}$$
$$= 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3\ln x}{2x^2}$$
$$= 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln x}{2x^2}$$
$$= f(x)$$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f(x)$ أي $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} = +\infty$$

9 –
$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ g'(1) = f(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \end{array}\right\}$$

إذن : معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي :

$y = \frac{7}{4}(x - 1) + \frac{7}{4}$ أي $y = \frac{7}{4}x$

10 – $g''(x) = [g'(x)]' = f'(x)$ لأن $g'(x) = f(x)$

إذن : $g''(x) = \frac{6x(-1 + \ln x)}{2x^4}$ حسب السؤال (2)

منه جدول إشارة $g''(x)$ على $]0 ; +\infty[$: هو نفسه جدول إشارة $f'(x)$ كمايلي :

x	0		e		$+\infty$
$g''(x)$		-	0	+	

إذن : g'' تنعدم عند e و تغير إشارتها .

منه : النقطة $A(e ; g(e))$ هي نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة g

حساب $g(e)$: $g(e) = e + \frac{3}{4e} + \frac{3}{2e} = \frac{4e^2+9}{4e}$

منه : $A\left(e \,;\, \frac{4e^2+9}{4e}\right)$ هي نقطة إنعطاف المنحنى (γ)

11 — $g(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} > 0$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{6}{4} - \frac{6\ln 2}{2} = 2 - 3\ln 2 < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [1/2\,;1] \\ g(1) \times g(1/2) < 0 \end{array}\right\}$$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا من المجال $]1/2\,;1[$

12 — $$\lim_{x \to +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{4x} + \frac{3}{2} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\}$$

منه المنحنى (γ) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) عند $+\infty$ معادلته $y = x$

13 — وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) :

$$g(x) - x = \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} = \frac{3}{2x}\left(\frac{1}{2} + \ln x\right)$$

إذن : إشارة $[g(x) - x]$ هي إشارة $\frac{1}{2} + \ln x$ فقط لأن $\frac{3}{2x} > 0$ كمايلي :

$$\frac{1}{2} + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{-1/2}$$
$$\Leftrightarrow x \geq e^{-1/2}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

منه إشارة $g(x) - x$ كما يلي :

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$g(x) - x$		$-$	0	$+$	

نتيجة :

لما $x \in \left]0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$: (γ) تحت (D)

لما $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$: (γ) يقطع (D)

لما $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$: (γ) فوق (D)

الإنشاء :